

FUNKTIONAALIANALYYSIN PERUSKURSSI
 KEVÄT / SPRING 2015
 LASKUHARJOITUS / EXERCISE 5

1. a) Olkoot A ja B normiavaruuden E konvekseja osajoukkoja. Osoita, että myös joukko $A + B := \{x + y \mid x \in A, y \in B\}$ on konvekksi. Onko joukko $A - B := \{x - y \mid x \in A, y \in B\}$ konvekksi? b) Todista suunnikasyyntälön avulla, että avaruudet ℓ^p , $1 \leq p < \infty$, $p \neq 2$, eivät ole Hilbert-avaruuksia.

2. Jos A on normiavaruuden E osajoukko, sanomme, että $x \in A$ on *normin minimoiva alkio*, mikäli

$$\|x\| = \inf\{\|y\| \mid y \in A\}.$$

a) Osoita, että $A := \{f \in C(0, 1) \mid f(t) = 1 \text{ kun } 0 \leq t \leq 1/2\}$ on avaruuden $C(0, 1)$ suljettu ja konvekssi osajoukko, jossa on äärettömän monta normin minimoivaa alkioita.

b) Tiedetään, että

$$B := \left\{ f \in C(0, 1) \mid f(0) = 0, f(t) \geq 0 \text{ kaikilla } t, \text{ ja } \int_0^1 f(t) dt = 1 \right\}$$

on avaruuden $C(0, 1)$ suljettu ja konvekssi osajoukko. Osoita, että B :ssä ei ole lainkaan normin minimoivaa alkioita. Ohje. B :n alkoiden normien infimum on 1.

3. Olkoon $(x_n)_{n=1}^\infty$ Hilbert-avaruuden H jono. Sanomme, että (x_n) suppenee avaruudessa H *heikosti* vektoriin $x \in H$, jos kaikilla $y \in H$ pätee

$$(x_n|y) \rightarrow (x|y), \text{ kun } n \rightarrow \infty.$$

Tässä siis suppeneminen tapahtuu kerroinkunnassa \mathbb{K} .

(i) Jos jono suppenee tavanomaisessa mielessä, osoita, että se suppenee myös heikosti.

(ii) Oletetaan, että $(x_n)_{n=1}^\infty$ on jono, joka suppenee vektoriin $x \in H$ heikosti, ja lisäksi pätee $\|x_n\| \rightarrow \|x\|$, kun $n \rightarrow \infty$. Osoita, että tällöin $\|x_n - x\| \rightarrow 0$, eli jono suppenee x :ään tavanomaisessa mielessä. Ohje. Tarkastele lauseketta $\|x_n - x\|^2$ ja käytä sisätuloa.

(iii) Olkoon $H := \ell^2$ sekä $e_n \in \ell^2$ tavanomainen n :s kanoninen kantavektori. Osoita, että jono $(e_n)_{n=1}^\infty$ suppenee vektoriin $0 \in \ell^2$ heikosti.

4. Tarkastellaan Hilbert-avaruutta $E := L^2([-1, 1])$. Mikä on aliavaruuden $G := \{f \in E : f(t) = -f(-t) \text{ melkein kaikilla } t \in [0, 1]\}$ ortogonaalinen komplementti G^\perp ?

1. a) Let A and B be convex subsets of the normed space E . Prove that $A + B := \{x + y \mid x \in A, y \in B\}$ is convex, too. Is the set $A - B := \{x - y \mid x \in A, y \in B\}$ convex? b) By using the parallelogram identity prove that the spaces ℓ^p , $1 \leq p < \infty$, $p \neq 2$, are not Hilbert spaces.

2. If A is a subset of a normed space E , we say that the element $x \in A$ is a *norm minimising element*, if

$$\|x\| = \inf\{\|y\| \mid y \in A\}.$$

a) Prove that $A := \{f \in C(0, 1) \mid f(t) = 1 \text{ kun } 0 \leq t \leq 1/2\}$ is a closed and convex subset of $C(0, 1)$ which has infinitely many norm minimising elements.

b) It is known that

$$B := \left\{ f \in C(0, 1) \mid f(0) = 0, f(t) \geq 0 \text{ for all } t, \text{ and } \int_0^1 f(t) dt = 1 \right\}$$

is a closed and convex subset of $C(0, 1)$. Show that B does not have any norm minimizing elements. Hint: the infimum of the norms of the elements of B is 1.

3. Let $(x_n)_{n=1}^\infty$ be a sequence in the Hilbert-space H . We say that it converges *weakly* in H to the vector $x \in H$, if for all $y \in H$ we have

$$(x_n|y) \rightarrow (x|y), \text{ as } n \rightarrow \infty.$$

(convergence in \mathbb{K}).

(i) Show that convergence in the conventional sense implies weak convergence.

(ii) Assumet that $(x_n)_{n=1}^\infty$ is a sequence, which converges weakly to $x \in H$ and that, moreover, $\|x_n\| \rightarrow \|x\|$, as $n \rightarrow \infty$. O Show that then $\|x_n - x\| \rightarrow 0$. Hint. Consider the expression $\|x_n - x\|^2$ and use the inner product

(iii) Let $H := \ell^2$ and $e_n \in \ell^2$ the usual n th basis vector. Show that $(e_n)_{n=1}^\infty$ converges to $0 \in \ell^2$ weakly.

4. Consider the Hilbert space $E := L^2([-1, 1])$. What is the orthogonal complement G^\perp of the subspace $G := \{f \in E : f(t) = -f(-t) \text{ for almost every } t \in [0, 1]\}$?