FUNKTIONAALIANALYYSIN PERUSKURSSI
KEVÄT / SPRING 2015
LASKUHARJOITUS / EXERCISE 2

1($*$). Tutki, ovatko seuraavat lineaariset kuvaukset hyvin määriteltyjä, rajoitettuja operaattoreita annetusta normiavaruudesta E normiavaruuteen F.

a) $S_w : (x_k)_{k=1}^\infty \mapsto (a_k x_{k+5})_{k=1}^\infty$, missä $a_k := k^{-1}$ sekä $E = \ell^2$, $F = \ell^1$,

b) $M_a : (x_k)_{k=1}^\infty \mapsto (a_k x_k)_{k=1}^\infty$, missä $a_k := \log k$ sekä $E = \ell^1$, $F = \ell^2$,

c) $T : (x_k)_{k=1}^\infty \mapsto \big(kx_k - (k+1)x_{k+1}\big)_{k=1}^\infty$, missä $E = F = \ell^2$.

2. Etsi avaruuden c_0 rajoitettu jono (siis $(x^{(n)})_{n=1}^\infty$, missä $x^{(n)} \in c_0$ kaikilla n, ja on olemassa vakio $C > 0$, jolle $\|x^{(n)}\|_\infty \leq C$ kaikilla n), jolla ei ole suppenevia osajonoja. Vihje. Poimi sopivia vektoreita, joiden normi on 1.

3. a) Olkoon X avaruuden c_0 vektorialiavaruus, joka koostuu jonoista, joissa on vain äärellisen monta nollasta poikkeavaa koordinaattia. Onko mahdollista approksimoida mitä tahansa c_0:n alkioita X:n alkiolla, eli, jos $y \in c_0$ ja $r > 0$ ovat mielivaltaisia, löytyykö alkiota $x \in X$, jolle $\|x - y\|_\infty \leq r$? b) Sama, kun c_0:n sijaan tarkastellaan avaruuksia (ja niiden omia normeja, tietty) ℓ^p, $1 \leq p < \infty$ tai ℓ^∞.

4($*$). Osoita, että rajoitettujen jonojen avaruus ℓ^∞, varustettuna sup-normilla, ei ole separoituva. Ohje. Voit käyttää tietoa, että $\mathbb{N}$:n kaikkien osajoukkojen A muodostama joukkoperhe $P(\mathbb{N})$ on ylinumeroituva. Tarkastele ℓ^∞:n alkioita muotoa

$$x = \big(x_k\big)_{k=1}^\infty \ , \text{ missä } x_k = 1, \text{ kun } k \in A, \text{ ja } x_k = 0, \text{ kun } k \notin A.$$

****

1($*$). Are the following linear mappings well-defined, bounded operators from the given normed space E into the space F.

a) $S_w : (x_k)_{k=1}^\infty \mapsto (a_k x_{k+5})_{k=1}^\infty$, where $a_k := k^{-1}$ and $E = \ell^2$, $F = \ell^1$,

b) $M_a : (x_k)_{k=1}^\infty \mapsto (a_k x_k)_{k=1}^\infty$, where $a_k := \log k$ and $E = \ell^1$, $F = \ell^2$,

c) $T : (x_k)_{k=1}^\infty \mapsto \big(kx_k - (k+1)x_{k+1}\big)_{k=1}^\infty$, where $E = F = \ell^2$.

2. In the space c_0, find a bounded sequence (that is $(x^{(n)})_{n=1}^\infty$, where $x^{(n)} \in c_0$ for all n, and there exists a constant $C > 0$ such that $\|x^{(n)}\|_\infty \leq C$ for all n), which does not have convergent subsequences. Instruction. Take suitable vectors with norm 1.

3. a) Let X be the subspace of c_0 consisting of sequences with only finitely many non-zero elements. Is it possible to approximate an arbitrary element of c_0 by an element of X, in other words, given arbitrary $y \in c_0$ and $r > 0$, can you find $x \in X$ such that $\|x - y\|_\infty \leq r$? b) The same with c_0 replaced with ℓ^p, $1 \leq p < \infty$ or ℓ^∞, all with their own norms, of course.

4($*$). Show that the space ℓ^∞ of bounded sequences, endowed with the sup-norm, is not separable. Hint. You can use the fact that the family $P(\mathbb{N})$ of all subsets A of $\mathbb{N}$ is uncountable. Consider elements of ℓ^∞, which are of the form

$$x = \big(x_k\big)_{k=1}^\infty \ , \text{ where } x_k = 1, \text{ for } k \in A, \text{ and } x_k = 0, \text{ for } k \notin A.$$