FUNKTIONAALIANALYYSIN PERUSKURSSI
KEVÄT / SPRING 2015
LASKUHARJOITUS 1 / EXERCISE 1

1*. Ovatko seuraavat reaaliarvoiset funktiot p normeja avaruudessa $\mathbb{R}^3$? Ovatko ne seminormeja? ($x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$)

a) $p(x) := x_1^2 + 2|x_2| + 3|x_3|$, b) $p(x) := |x_1| + 5\max\{|x_2|, |x_3|\}$,

c) $p(x) := 10|x_1 - x_2| + 5|x_3|$, d) $p(x) := |x_1 + 2x_2| + |x_1 - 2x_2| + |x_3|$.

2*. Suppeneeko jono $(f_n)_{n=1}^\infty$ avaruudessa $C(0,1)$ (suljetun välin $[0,1]$ jatkuvien funktioiden avaruus varustettuna tavanomaisella sup–normillaan), kun $f_n := f_n(t)$, $t \in [0,1]$ on

a) $\frac{1}{n}\cos(nt)$, b) $(1-t)^n$, c) $\sqrt{n}\big(\sin(t+\frac{1}{n}) - \sin t\big)$?

Avaruudessa $C(0,1)$ myös lauseke

$$\|f\|_1 := \int_0^1 |f(t)|dt \tag{1}$$

määrittelee normin. Suppenevatko jonot a)–c) tämän normin mielessä?

3. Oletetaan, että normit $\|\cdot\|_1$ ja $\|\cdot\|_2$ ovat ekvivalentit vektoriavaruudessa X.
a) Osoita, että jos jono $(x_n)_{n=1}^\infty$ suppenee normiavaruudessa $(X, \|\cdot\|_1)$, niin se suppenee myös avaruudessa $(X, \|\cdot\|_2)$.
b) Osoita, että jos osajoukko $A \subset X$ on avoin avaruudessa $(X, \|\cdot\|_1)$, niin se on avoin myös avaruudessa $(X, \|\cdot\|_2)$.
Pätevätkö väittämät a) ja b), jos normien ekvivalenssin sijaan oletamme ainoastaan, että $\|x\|_1 \geq \|x\|_2$ kaikilla $x \in X$?

4. Olkoon E normiavaruus, kerroinkuntana $\mathbb{R}$. Osoita, että kuvaukset $\psi : E \times E \to E$, $\psi : (x,y) \mapsto x + y$ ja $\phi : \mathbb{R} \times E \to E$, $\phi : (\lambda, y) \mapsto \lambda y$ ovat jatkuvia.
(Jatkuvuuden osoittamiseksi kuvaukselle ψ riittää esimerkiksi näyttää, että $x_n + y_n \to x + y$, kun $(x_n)_{n=1}^\infty$ ja $(y_n)_{n=1}^\infty$ ovat sellaisia jonoja avaruudessa E, että $x_n \to x$ ja $y_n \to y$, kun $n \to \infty$. Vastaavasti kuvaukselle ϕ.)

****

1*. Do the following real valued functions $p : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ satisfy the definition of a norm? What about the definition of a seminorm? ($x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$; see above for the functions p)

2*. Does the sequence $(f_n)_{n=1}^\infty$ converge in the space $C(0,1)$ (which consists of continuous functions on $[0,1]$ and is endowed with the usual sup-norm) for $f_n := f_n(t)$, $t \in [0,1]$ given in a)-c) above?
The expression (1) also defines a norm in the space $C(0,1)$. Consider the convergence of the sequences a)-c) with respect to this norm.

3. Assume that the norms $\|\cdot\|_1$ and $\|\cdot\|_2$ are equivalent in the vector space X.

a) Prove that if the sequence $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ converges in the normed space $(X, \|\cdot\|_1)$, then it also converges in $(X, \|\cdot\|_2)$.
b) Prove that if the subset $A \subset X$ is open in the space $(X, \|\cdot\|_1)$, then it is also open in $(X, \|\cdot\|_2)$.
Do these statements a) and b) hold, if we just assume $\|x\|_1 \geq \|x\|_2$ for all $x \in X$, instead of the equivalence of the norms ?

4. Let E be a normed space with coefficient field $\mathbb{R}$. Prove that the mappings $\psi : E \times E \to E$, $\psi : (x, y) \mapsto x + y$ and $\phi : \mathbb{R} \times E \to E$, $\phi : (\lambda, y) \mapsto \lambda y$ are continuous.
(In case of ψ it is enough for example to show that $x_n + y_n \to x + y$, if $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ ja $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ are sequences in E satisfying $x_n \to x$ and $y_n \to y$, as $n \to \infty$. The same for ϕ.)