Autonomiset systeemit

I. Johdanto, perustuloksia ja merkintöjä

Kurssissa käsitellään tavallisten reaalisten differentiaaliyhtälöiden systeemejä niiden dynamiikan kannalta. Autonomisilla systeemeillä on tässä suhteessa erityisasema. Perustava tavoite on tutkia ratkaisujen käyttäytymistä ratkaisematta systeemiä.

Differentiaaliyhtälön tai -yhtälösysteemin ratkaisu voi olla melkoisen mutkikas funktio laatuansa, jotta ei oikein voida löytää kaikkia yhtälöitä ja niiden ratkaisuja koskevia yleisiä sääntöjä.

Esimerkki. Olkoon $x(t): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mikä tahansa derivoituva funktio. Merkitään $f = \dot{x} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (jossa $\dot{x}(t) = x'(t)$). Tällöin funktio x toteuttaa kaikilla $t \in \mathbb{R}$ differentiaaliyhtälön

$$\dot{x}(t) = f(t).$$

Tässä siis ratkaisujen käyttäytyminen voi olla mitä laatuansa, ja niinpä käyttäytymisen ennakoimisessa täytyy rajoittua johonkin differentiaaliyhtälöiden tai -yhtälösysteemien erikoisluokkaan. Autonominen yhtälö (systeemi) ei riipu eksplisiittisesti vapaasta muuttujastaan, esimerkiksi t.

Esimerkki dimensiossa yksi.

Tarkastellaan autonomista differentiaaliyhtälöä

$$\dot{x}(t) = x(1-x). \qquad (*)$$

Separoituvana yhtälönä se voitaisiin ratkaista, mutta tutkitaan kvalitatiivisesti ratkaisujen käyttäytymistä ennakkoon, ilman eksplisiittistä ratkaisua.

Normaalimuodon (*) määrittelee funktio $f(x) = x(1-x)$, joka siis ei riipu t:stä. Se toteuttaa polynomina kaikki OY-lauseiden ehdot koko (t,x)-tasossa $\mathbb{R}^2$ (lauseet OY I ja II).

$x(1-x)=0 \iff x=0$ tai $x=1$. Yhtälöllä (*) on siis triviaaliratkaisut $x(t)\equiv 0$ ja $x(t)\equiv 1$. Ratkaisujen yksikäsitteisyyden nojalla muut ratkaisut eivät kohtaa näitä. Erityisesti, jos $0<x_0<1$, niin alkuarvotehtävän

$$\dot{x} = x(1-x), \quad x(0)=x_0, \qquad (**)$$

on ratkaisu $x(t): I\to\mathbb{R}$, ja pätee $0<x(t)<1$ kaikilla $t\in I$. Poistumislauseen nojalla itse asiassa pätee $I=\mathbb{R}$.

Tällöin $\dot{x}(t) = x(t)(1-x(t))>0$ kaikilla $t\in\mathbb{R}$, joten väliarvolauseen nojalla funktio $x(t)$ on aidosti kasvava. Koska se on kasvava ja rajoitettu, raja-arvo

$$x_\infty = \lim_{t\to\infty} x(t) = \sup\{x(t) \mid t\in\mathbb{R}\}$$

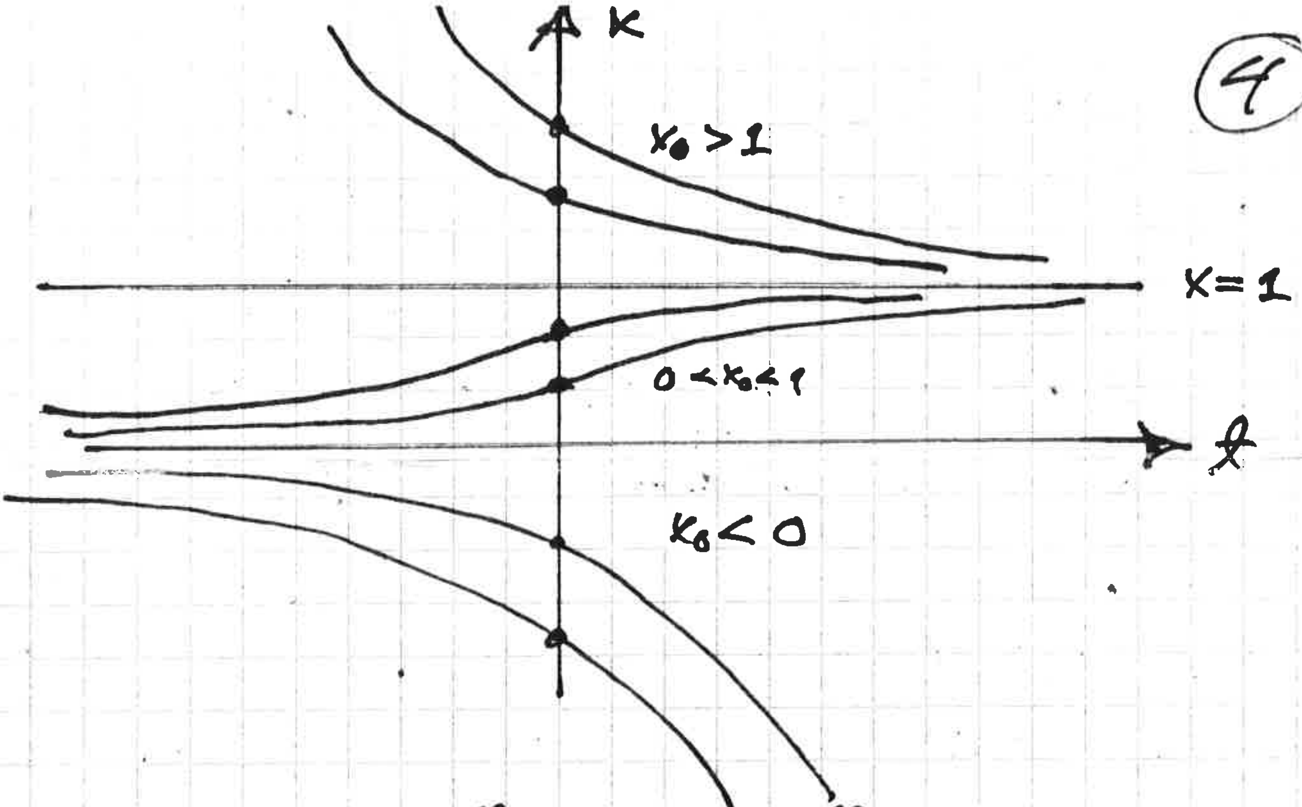
on tunnetusti olemassa ja $x_\infty \leq 1$.
Vastaavasti on olemassa $x_{-\infty} = \lim_{t\to-\infty} x(t) = \inf\{x(t) | t\in\mathbb{R}\}$
ja $x_{-\infty} \geq 0$.

Koska myös $\dot{x}_\infty = \lim_{t\to\infty} \dot{x}(t) = \lim_{t\to\infty} x(t)(1-x(t))$
$= x_\infty(1-x_\infty)$ on olemassa, luennoissa DY I
esitetyn lemman 2.1 nojalla $\dot{x}_\infty = 0$.
Siis $x_\infty(1-x_\infty) = 0 \Leftrightarrow x_\infty = 0$ tai $x_\infty = 1$.
Kasvavuudesta seuraa että $\underline{\underline{x_\infty = 1}}$.

Jos $x_0 > 1$, AAT:n (**) ratkaisulle
$x(t): I \to \mathbb{R}$ pätee $x(t) > 1$ kaikilla $t \in I$,
joten $\dot{x}(t) = x(t)(1-x(t)) < 0$; funktio $x(t)$
on vähenevä, joten $1 < x(t) \leq x_0$ kaikilla
$t \in I \cap \mathbb{R}_+$. Poistumislause kertoo että
$\mathbb{R}_+ \subset I$, vähenevyys että $x_\infty = \lim_{t\to\infty} x(t)$ on
olemassa ja $x_\infty \geq 1$. Jälleen $\dot{x}_\infty = 0$,
josta seuraa että $\underline{\underline{x_\infty = 1}}$, nyt ylhäältä.

Jos taas $x_0 < 0$, AAT:n (**) ratkaisu
$x(t): I \to \mathbb{R}$ ei ole kunnossa $+\infty$:ään asti
(joten x_∞ ei ole edes mielekäs). Sen sijaan
$x_{-\infty} = 0$.

Eksplisiittiset ratkaisut ovat muotoa
$x(t) = \dfrac{e^t}{c+e^t}$, $c\in\mathbb{R}$, ja $x(t) \equiv 0$.



Yhteenveto: "Loppatila" on $x_\infty = 1$, jos $x(0)=x_0>0$. Sitä ei ole, jos $x(0)=x_0<0$.

Lisäksi vakioratkaisu $x(t)\equiv 1$ on stabiili, sillä AAT:n (**) ratkaisu $x(t)$ vain lähestyy sitä, kun $x_0>0$, kuten edellä nähtiin. Itse asiassa AAT:n (**) ratkaisut ovat stabiileja kaikki, kun $x_0>0$.

Sen sijaan vakioratkaisu $x(t)\equiv 0$ on epästabiili, samoin aina kun $x_0<0$.

<u>Esimerkki</u>. Tarkastellaan autonomista 2. kl. differentiaaliyhtälöä

$$\ddot{x}(t)-x(t)=0. \qquad (*)$$

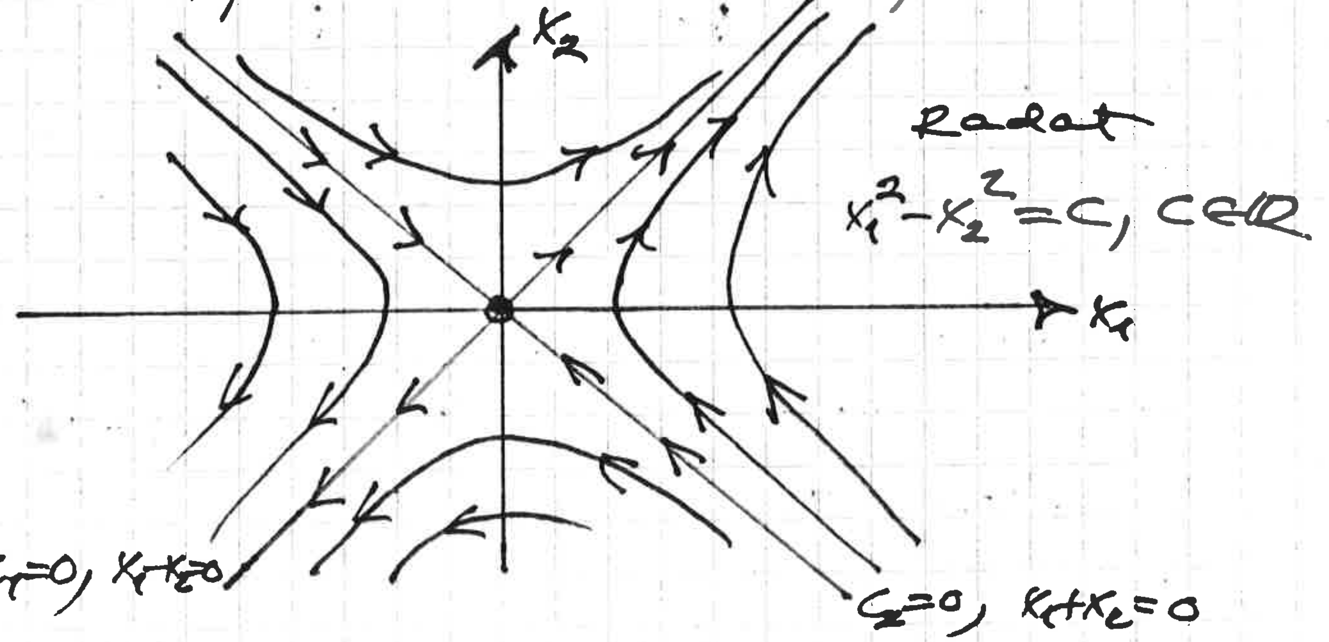
Se on vakiokertoiminen homogeeniyhtälö, jonka yleinen ratkaisu on $x(t)=c_1e^{-t}+c_2e^{t}$, $c_1,c_2\in\mathbb{R}$.
Se palautuu sijoituksella $x_1(t)=x(t)$ ja $x_2(t)=\dot{x}(t)$ autonomiseksi 1. kl. pariksi

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$
$$\dot{x}_2(t) = x_1(t) \qquad (**)$$

jonka yleinen ratkaisu on siis

$$z(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 e^{-t} + c_2 e^{t} \\ -c_1 e^{-t} + c_2 e^{t} \end{bmatrix} = c_1 e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + c_2 e^{t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Systeemin lopputila on olemassa vain kun $c_2 = 0$. Tällöin $z(t) \to \bar{0} = (0,0)$.
Muussa tapauksessa $\|z(t)\| \to \infty$, kun $t \to \infty$.



Triviaaliratkaisu $z(t) \equiv \bar{0}$ on epästabiili. Toikeammin, epästabiileja ovat seuraalla $x_1 + x_2 = 0$ pysyvät ratkaisut, muut ovat stabiileja (ainakin tietyssä mielessä, eli radat pysyvät lähellä, jos ovat sitä alussa).

Esimerkki. Autonominen 2. kl. yhtälö

$$\ddot{x}(t) + x(t) = 0. \qquad (*)$$

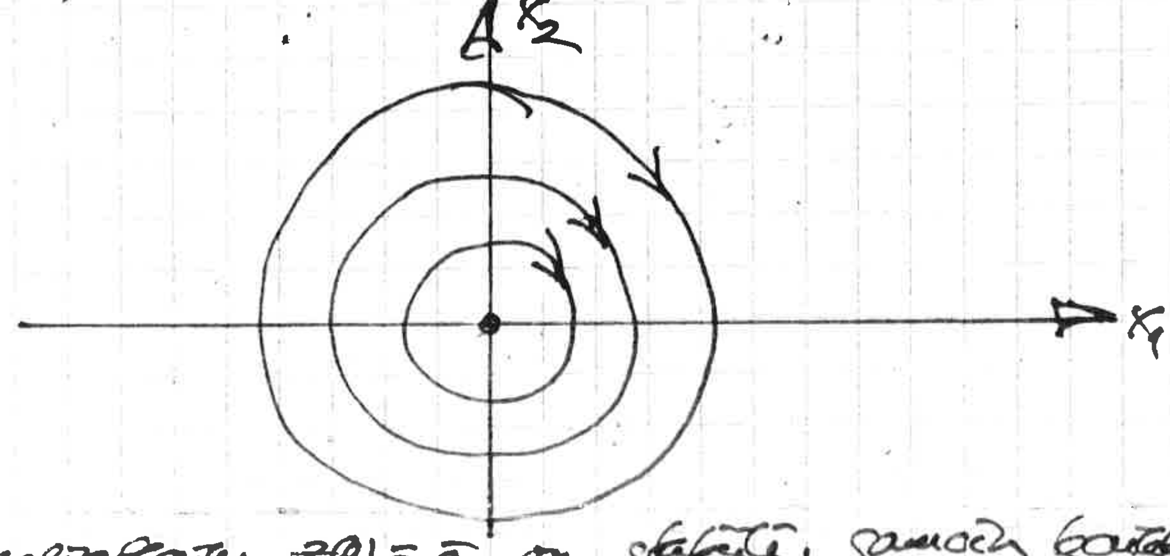
Sen yleinen ratkaisu on $x(t)=c_1\cos t+c_2\sin t$, $c_1,c_2\in\mathbb{R}$, ja se palautetaan standardisijoituksella $x_1(t)=x(t)$ ja $x_2(t)=\dot{x}(t)$ autonomiseksi 1. kl. pariksi

$$\dot{x}_1(t)=x_2(t)$$
$$\dot{x}_2(t)=-x_1(t)\qquad (***)$$

jonka yleinen ratkaisu on

$$z(t)=\begin{bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c_1\cos t+c_2\sin t\\-c_1\sin t+c_2\cos t\end{bmatrix}=c_1\begin{bmatrix}\cos t\\-\sin t\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}\sin t\\\cos t\end{bmatrix}.$$

Ratkaisujen radat ovat x_1x_2-tason ympyröitä (harj. osoita tämä) $x_1^2+x_2^2=C$, $C\in\mathbb{R}_+$, kunkin ratkaisun $z(t)$ kiertäessä sellaista periodisesti (myötäpäivään). Lopputila on siis aika ilmassa: se on itse ratkaisu, periodisesti kierrettävä ympyrä, eli siis oikeastaan tietty piste.



Triviaaliratkaisu $z(t)\equiv\bar{0}$ on stabiili, samoin kaikki muutkin ratkaisut (ainakin laajassa mielessä).

Kahden edellisen esimerkin valossa näyttää, että joka autonomisen 1. kl. systeemin ratkaisu pyrkii äärettömään, tai – näin laajassa mielessä – sillä on lopputila! Tämä osoitetaan todeksi! Vielä tarkennuksen tarpeessa, joiltain osalta.

Olkoon $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ja $\|x\|$ sen tavallinen euklidinen normi. Olkoon $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ reaalimuuttujan t, "ajan", vektoriarvoinen funktio (arvot $\mathbb{R}^n$:ssä). Käytetään sen derivaatasta merkintää $\dot{x}(t)$, siis $\dot{x}(t) = (\dot{x}_1(t), \dots, \dot{x}_n(t))$. Olkoon D avaruuden $\mathbb{R}^n$ alue ja kuvaus $f : D \to \mathbb{R}^n$ (vähintään) jatkuva. Se määrittelee alueessa D autonomisen 1. kl. systeemin (tai yhtälön)

$$\dot{x} = f(x). \qquad (1.1)$$

Yhtälö on siis normaalimuotoa, eikä riipu eksplisiittisesti riippumattomasta muuttujasta t eli ajasta (joka on tuntemattoman funktion $x = x(t)$ muuttuja).

Tunnetusti (Peano 1890) systeemin (1.1) alkuarvotehtävällä $\dot{x} = f(x)$, $x(t_0) = x_0$, on ainakin yksi lokaali ratkaisu $x :]\alpha, \beta[\to D$ (kaikilla alkuarvoilla $t_0 \in \mathbb{R}$ ja $x_0 \in D$). Se on saanut vallessyntaltaan vähintään C^1 funktio.

Kuvaus f on Lipschitz joukossa E, jos jollakin vakiolla $L \geq 0$ pätee

$$\| f(x) - f(y) \| \leq L \|x - y\| \quad \text{kaikilla } x, y \in E.$$

Kuvaus $f : D \to \mathbb{R}^n$ on lokaalisti Lipschitz, jos jokaisella $x \in D$ löytyy sen ympäristö U_x, jossa f on Lipschitz. Tähän riittää esimerkiksi jatkuvat osittaisderivaatat.

Jos systeemin (1.1) f on vieläpä lokaalisti Lipschitz, niin edellä mainitulle ratkaisulle $x(t)$ pätee enemmänkin (katso kurssi DY II). Nimittäin, koska f ei riipu t:stä, se on jatkuva joukossa $\mathbb{R}\times D$ ja tasaisesti Lipschitz-jatkuva muuttujan x suhteen joukossa $\mathbb{R}\times U_x$. Siispä kun f on lokaalisti Lipschitz, pätee:

(1) Alkuarvotehtävän ratkaisu on yksikäsitteisesti määrätty.
(2) Alkuarvotehtävällä on (yksikäsitteisesti määrätty) maksimaaliratkaisu $x:]t^-, t^+[\to D$,

jossa ratkaisuväli $\Delta =]t^-, t^+[$ on maksimaalinen ja avoin, ja $t^-, t^+ \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Kaikki muut ratkaisut ovat sen rajoittumia.

(2) perustelu: Olkoot $y_i : \Delta_i \to D$, $i \in I$, kaikki alkuarvotehtävän $\dot{x} = f(x)$, $x(t_0) = x_0$, ratkaisut (ja niitä on). Väli Δ_i voi olla avoin, puoliavoin tai suljettu. Määritellään

$$\Delta = \bigcup_{i\in I} \Delta_i \quad \text{ja} \quad x(t) = y_i(t), \text{ kun } t \in \Delta_i.$$

Yksikäsitteisyyden (1) nojalla x on hyvin määritelty. Selvästi se on (1.1):n ratkaisu, ja väli Δ on maksimaalinen. Lisäksi Δ ei voi sisältää päätepisteitään, sanotaan pistettä t^+, sillä muuten on olemassa alkuarvon $y(t^+) = x(t^+)$ toteuttava ratkaisu y, joka jatkaa ratkaisuväliä Δ yli pisteen ~~t~~ t^+ (yksikäsitteisyys). □

Huom. Kurssissa DY I kohdalle (1) annetaan todistus vain yhden skalaariyhtälön tapauksessa, mutta pienin muutoksin se saadaan koskemaan myös systeemejä. Tässä monisteessa

Hyödyllinen lisätieto on seuraava (pätee varsin yleisesti integraaleille Banachin avaruuksissa):

Olkoon $\alpha : [t_1, t_2] \to D$ jatkuva kuvaus. Tällöin

$$\left\| \int_{t_1}^{t_2} f(\alpha(t))\,dt \right\| \le \int_{t_1}^{t_2} \| f(\alpha(t)) \|\,dt. \quad (1.2)$$

Epäyhtälö (1.2) voidaan todistaa vaikkapa soveltamalla kolmioepäyhtälöä Riemannin summiin.

Olkoon $r > 0$ ja $\bar{B}(x_0, r) \subset D$. Esimerkiksi Picardin approksimaatioista seuraa (kurssi DY I), että alkuarvotehtävän $\dot{x} = f(x)$, $x(t_0) = x_0$, ratkaisu $x : \Delta \to D$ on olemassa ainakin välillä $]t_0 - \delta, t_0 + \delta[$, jossa

$$\delta = r/m, \text{ kun } \|f(x)\| \le m \text{ kaikilla } x \in \bar{B}(x_0, r). \quad (1.3)$$

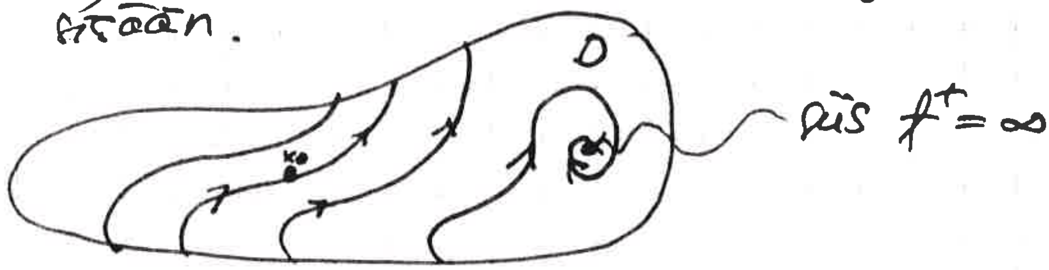
Huomaa, että f on Lipschitz kompaktissa kuulassa $\bar{B}(x_0, r)$.
Harjoitus. Todista tämä.

<u>Poistumislause.</u> Olkoon $f : D \to \mathbb{R}^n$ lokaalisti Lipschitz. Olkoon $x_0 \in D$ ja $x :]t^-, t^+[\to D$ alkuarvotehtävän $\dot{x} = f(x)$, $x(t_0) = x_0$, (maksimaalinen) ratkaisu. Olkoon $K \subset D$ kompakti. Tällöin $t^+ = \infty$ tai löytyy sellainen $t_1 < t^+$, että $x(t) \notin K$ kaikilla $t_1 < t < t^+$. Vastaava pätee alarajalle t^-.

<u>Tod.</u> Olkoon $t^+ \in \mathbb{R}$. Vastaoletus: Löytyy jono (t_k), jolle pätee $t_k \to t^+$ ja $x(t_k) \in K$. Koska K on kompakti, tarvittaessa siirtymällä osajonoon voidaan olettaa, että $x(t_k) \to x_1 \in K$. Valitaan sellainen $r > 0$, että $\bar{B}(x_1, r) \subset D$, ja sellainen k, että $\|x(t_k) - x_1\| < r/2$. Silloin

$\bar{B}(x(t_k), r/2) \subset \bar{B}(x_0, r) \subset D$,
ja alkuarvotehtävällä $\dot{y} = f(y)$, $y(t_k) = x(t_k)$, on lauseen (1.3) mukaan ratkaisu $y :]t_k - \delta, t_k + \delta[\to D$, jossa $\delta = r/2m$ ja $m = \max\{\|f(x)\| \mid x \in \bar{B}(x_0, r)\}$ (ei riipu k:sta!). Yksikäsitteisyydestä seuraa että $y(t) = x(t)$. Kun vielä valitaan k niin, että $t_k + \delta > t^+$, saadaan ristiriita. □

Voidaan siis sanoa, että ratkaisu jatkuu ajassa loppumattomiin tai sitten se poistuu alueesta D; se ei voi samana äärellisessä ajassa alueen sisään.



Huom. Vastaava tulos pätee myös ei-autonomiselle systeemille, ja todistuskaan ei analyyttisesti muutu. Pitää vain olettaa, että $f(t, x)$, joka nyt siis riippuu t:stä, on jatkuva ja lokaalisti tasaisesti Lipschitz muuttujan x suhteen alueessa $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

Huom. Tästä eteenpäin aina oletetaan, että kuvaus $f : D \to \mathbb{R}^n$ on vähintään lokaalisti Lipschitz.

Tyypillistä autonomisille systeemeille on, että aikamuuttujalle t voidaan tehdä translaatio: Jos $x :]t^-, t^+[\to D$ on alkuarvotehtävän $\dot{x} = f(x)$, $x(0) = x_0$, ratkaisu, niin funktio $y :]t^- + t_0, t^+ + t_0[\to D$, $y(t) = x(t - t_0)$, on tehtävän $\dot{x} = f(x)$, $x(t_0) = x_0$, (yksikäsitteisesti määrätty) ratkaisu. Siksi alkuehdoissa voidaan aina valita $t_0 = 0$. Ratkaisuilla x ja y on sama rata D:ssä.

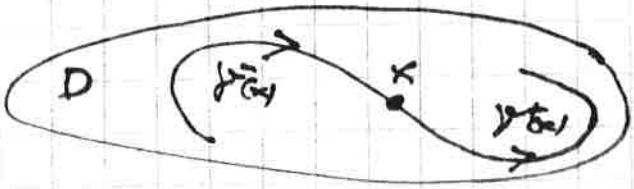
Pidetään autonomisen systeemi (1.1) annettuna, ja sen määrittelevä $f: D \to \mathbb{R}^n$ olkoon lokaalisti Lipschitz D:ssä. Otetaan käyttöön systeemiin liittyviä merkintöjä ja nimityksiä:

Olkoon piste $x \in D$ kiinnitetty. Olkoon $x(t)$ alkuarvotehtävän $\dot{x} = f(x)$, $x(0) = x$ ratkaisu. Sen maksimaalinen ratkaisuväli olkoon

$$\Delta(x) =]t^-, t^+[=]t^-(x), t^+(x)[, \qquad (1.4)$$

jossa $t^\pm(x) \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Tietysti $0 \in \Delta(x)$. Ratkaisun arvolle $x(t)$ pisteessä t käytetään myös merkintää $t \cdot x$. Tällä on siis mieltä aina silloin kun $t \in \Delta(x)$.

<u>Rata</u> pisteen x kautta eli ratkaisun $x(t)$ rata on
$$\gamma(x) = \{x(t) \mid t \in \Delta(x)\} = \{t \cdot x \mid t \in \Delta(x)\}. \qquad (1.5)$$
Radat eteenpäin ja taaksepäin ovat
$$\gamma^+(x) = \{t \cdot x \mid 0 \le t < t^+\} \text{ ja } \gamma^-(x) = \{t \cdot x \mid t^- < t < 0\}. \qquad (1.6)$$

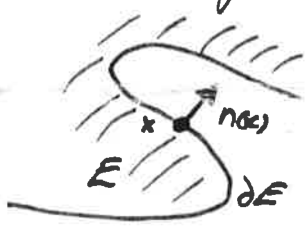


Joukko $E \subset D$ on autonomisen systeemin suhteen <u>positiivisesti invariantti</u> (vastaavasti negatiivisesti invariantti) jos
$$\gamma^+(E) \subset E \ (\text{vast. } \gamma^-(E) \subset E) \text{ eli } \gamma^+(x) \subset E \text{ kaikilla } x \in E. \qquad (1.7)$$
Joukko E on <u>invariantti</u>, jos $\gamma(E) \subset E$.

<u>Lemma 1.1.</u> Olkoon $E \subset D$ positiivisesti invariantti, sen sulkeuma $\bar{E}$ $\mathbb{R}^n$:ssä olkoon kompakti ja $\bar{E} \subset D$. Jos $x \in E$, niin $t^+(x) = \infty$. Kun E on peräti invariantti niin kaikilla $x \in E$ pätee lisäksi $t^-(x) = -\infty$.

Tod. Poistumislause. □

Lause 1.1. Olkoon $E \subset \bar E \subset D$ alue, jonka reuna on säännöllinen $n-1$-monisto. Olkoon $x \in \partial E$ ja $n(x)$ siihen pisteeseen asetettu reunan ulkonormaali, siis $x + t n(x) \in \mathbb{R}^n \setminus \bar E$ pienillä $t>0$ (erityisesti $n(x) \neq \bar 0$).



Jos kaikilla $x \in \partial E$ pätee (pistetulo)

$$n(x) \bullet f(x) < 0 \qquad (1.8)$$

niin alue E on positiivisesti invariantti systeemissä (1.1).

Tod. Olkoon $x \in E$. Vastaoletus: $t \cdot x \notin \bar E$ jollakin $t>0$. Tällöin reunanylityslauseen nojalla on olemassa sellainen $t_1>0$, että $t_1 \cdot x \in \partial E$ ja $t\cdot x \in E$ kaikilla $0 \le t < t_1$ ($t_1 = \inf\{t>0 \mid t\cdot x \in \partial E\}$). Oletuksen (1.8) mukaan

$$n(t_1\cdot x)\bullet f(t_1\cdot x) = -2\varepsilon < 0,$$

jossa $\varepsilon>0$. Tästä, f:n jatkuvuudesta ja väliarvolauseesta, soveltamalla ~~[illegible]~~, seuraa että löytyy $0<\delta<t_1$, jolle pätee

$$(t\cdot x - t_1\cdot x)\bullet n(t_1\cdot x) > \varepsilon(t_1 - t) \text{ kaikilla } t_1-\delta<t<t_1. \qquad (1.9)$$

Harjoitus. Todista epäyhtälö (1.9). Ohje. Huomaa että $t\cdot x = x(t)$ on systeemin (1.1) ratkaisu, jolla $x(0)=x$.

Kuvauksen $t \mapsto \|t\cdot x - t_1\cdot x\|$ Lipschitzisyydestä (väliarvolause) ~~tasaisesta jatkuvuudesta~~ ja (1.9):stä seuraa, että jollakin $\eta>0$ pätee

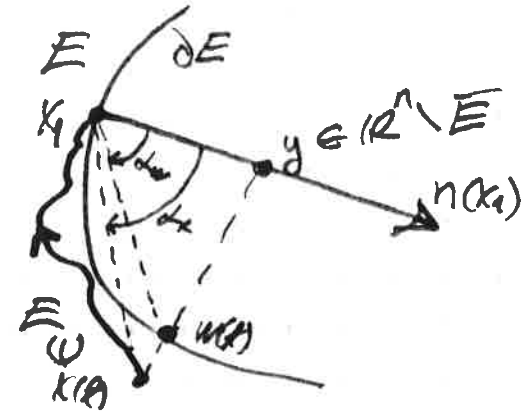
$$(t\cdot x - t_1\cdot x)\bullet n(t_1\cdot x) \geq \eta \|t\cdot x - t_1 \cdot x\| \text{ kaikilla } t_1-\delta<t<t_1. \qquad (1.10)$$

Merkitään $x_1 = t_1\cdot x$, $x(t) = t\cdot x$ ja $y = t_1\cdot x + t_2\, n(t_1\cdot x)$, jossa $t_2>0$ on valittu niin, että $y \in \mathbb{R}^n\setminus \bar E$.

Suoritetaan rajankäynti $t \uparrow t_1$ lausekkeessa

$$\frac{x(t)-x_1}{\|x(t)-x_1\|} \bullet n(x_1) \le \frac{w(t)-x_1}{\|w(t)-x_1\|} \bullet n(x_1), \qquad (1\text{-}11)$$

jossa $w(t) \in \partial E$, ja se on pisteet y ja $x(t)$ yhdistävällä janalla.



$\alpha_x > \alpha_w$

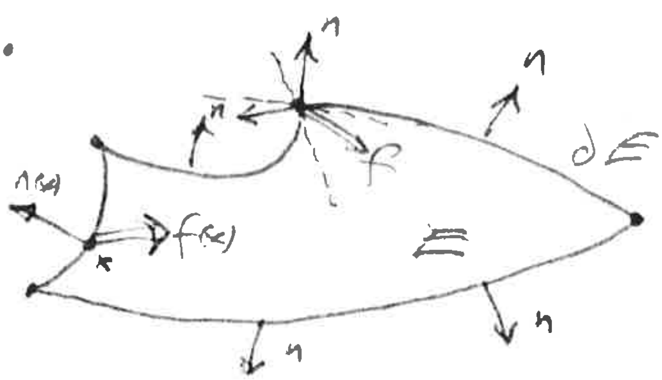
Koska $\frac{w(t)-x_1}{\|w(t)-x_1\|} \bullet n(x_1) \to 0$, kun $t \uparrow t_1$, epäyhtälön (1-11) mukaan löytyy sellainen $t_1 - \delta < t < t_1$, että

$$\frac{x(t)-x_1}{\|x(t)-x_1\|} \bullet n(x_1) < \gamma/2,$$

vastoin epäyhtälöä (1-10). Ristiriita osoittaa väitteen todeksi. $\square$

Siis kun virtaus on reunalla sisäänpäin, se ei pääse ulos alueesta E.

Huom. Yleisesti tässä riittää olettaa reunasta ∂E vain, että se on paloittain säännöllinen $n-1$-monisto.



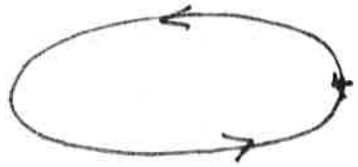
Piste $x \in D$ on kriittinen (stationaarinen) piste, jos $f(x) = \bar{0}$. Selvästi yhtäpitävästi vakiofunktio $x(t) \equiv x$ on systeemin (1.1) ratkaisu. Silloin $\Delta(x) = \mathbb{R}$ ja $\gamma(x) = \{x\}$ (yksiö). Kyseistä vakioratkaisua kutsutaan systeemin (1.1) tasapainotilaksi (equilibrium solution).

Piste $x \in D$ ja vastaava rata $\gamma(x)$ ovat periodisia (rata myös suljettu), jos löytyy sellainen $t_0 > 0$, että $t_0 \cdot x = x$ $(= 0 \cdot x)$. Pienin tällainen luku $T > 0$ on periodi. Se on olemassa, jos kriittistä pistettä ei lasketa periodiseksi.

Harjoitus. Todista periodin olemassaolo.

Yksikäsitteisyydestä seuraa helposti, että periodiselle pisteelle x ja sen periodille T pätee

$$(t+T)\cdot x = t\cdot x \text{ kaikilla } t \in \mathbb{R} \text{ ja } \Delta(x) = \mathbb{R}. \quad (1.12)$$



$x = T\cdot x = (kT)\cdot x$, $k \in \mathbb{Z}$.

Huom. Periodisten ratojen lisäksi on olemassa singulaarisesti suljettuja ratoja $\gamma(x)$, joissa $\Delta(x) = \mathbb{R}$ ja löytyy $x_0 \in D$, jolla $x_0 = \lim_{t\to\pm\infty} t\cdot x$.

Tällöin x_0 on välttämättä kriittinen piste ja $x_0 \notin \gamma(x)$.

Harjoitus. Osoita, että raja-arvo $x_0 = \lim_{t\to\infty} t\cdot x$ (tai $t\to-\infty$) $\in D$ on välttämättä kriittinen piste.

Harjoitus. Osoita, että "jollain tapaa sulkeutuvat radat" ovat kriittinen piste, periodinen ja singulaarisesti suljettu rata.

Olkoon $x \in D$, $s \in \Delta(x)$ ja $t \in \Delta(s \cdot x)$.
Yksikäsitteisyydestä ja aikatranslaatio-ominaisuudesta seuraa välittömästi että

$$t \cdot s \cdot x = t \cdot (s \cdot x) = (t+s) \cdot x, \qquad (1.13)$$

sillä jos $x(0) = x$ ja $y(0) = s \cdot x = x(s)$, niin

$$t \cdot (s \cdot x) = y(t) = x(t+s) = (t+s) \cdot x.$$

Voi sanoa että virtauksen jokainen kohta voidaan ottaa alkuarvoksi.

Määritellään autonomiseen systeemiin (1.1) liittyvä <u>virtauskuvaus</u> ϕ eli <u>dynaaminen systeemi</u> joukolla D asettamalla $\phi(t,x) = t \cdot x$.
Sen määrittelyjoukko olkoon $\Omega \subset \mathbb{R} \times D$, siis $\phi : \Omega \to D$.

<u>Lemma 1.2 (Gronwallin epäyhtälö).</u>

Olkoot u ja v jatkuvia reaalifunktioita, joilla $u(t), v(t) \geq 0$ kaikilla $t \in [a,b]$. Olkoon $C \geq 0$ vakio. Jos

$$v(t) \leq C + \int_a^t u(\tau)v(\tau)\,d\tau, \quad \text{kun } t \in [a,b], \qquad (1.14)$$

niin

$$v(t) \leq C \exp\left(\int_a^t u(\tau)\,d\tau\right) \quad \text{kaikilla } t \in [a,b]. \qquad (1.15)$$

Tod. Oletetaan aluksi että $C > 0$, ja määritellään funktio

$$w(t) = C + \int_a^t u(\tau)v(\tau)\,d\tau, \quad t \in [a,b].$$

Tällöin oletuksen (1.14) nojalla $v(t) \leq w(t)$, ja koska u ja v ovat ei-negatiivisia, niin $w(t) \geq w(a) = C > 0$ kaikilla $t \in [a,b]$. Koska pätee $\dot{w}(t) = u(t)v(t) \leq u(t)w(t)$, saadaan

$$\frac{\dot{w}(t)}{w(t)} \leq u(t) \quad \text{kaikilla } t \in [a,b].$$

Siten

$$\ln\left(\frac{w(t)}{c}\right) = \ln w(t) - \ln w(a) = \Big|_a^t \ln w(\tau) = \int_a^t \frac{w'(\tau)}{w(\tau)}\,d\tau \le \int_a^t u(\tau)\,d\tau.$$

Koska eksponenttifunktio on kasvava, saadaan

$$v(t) \le w(t) \le c\exp\left(\int_a^t u(\tau)\,d\tau\right) \text{ kaikilla } t\in[a,b] \text{ eli (1.15).}$$

Olkoon lopuksi $c=0$. Silloin (1.14) pätee kaikilla $c>0$, ja jo todistetun mukaan (1.15) pätee kaikilla $c>0$. Rajankäynnillä $c \downarrow 0$ saadaan $v(t)\le 0$, mikä on väite tapauksessa $c=0$. $\square$

Merkintä: $\widehat{[a,b]} = \begin{cases} [a,b], & \text{jos } a\le b, \\ [b,a], & \text{jos } a>b. \end{cases}$

Lause 1.2. Olkoot $x(t) = t\cdot x$ ja $y(t) = t\cdot y$ systeemin (1.1) ratkaisuja, jotka toteuttavat alkuehdot $x(0)=x$ ja vastaavasti $y(0)=y$.

Olkoon $T\in\Delta(x)\cap\Delta(y)$. Oletetaan seuraavaa:

(1) Löytyy sellainen $r>0$, että f on L-Lipschitz kaikilla $t\in\widehat{[0,T]}$ kuulassa $\overline{B}(t\cdot x, r)\subset D$, ja $L\ge 0$ ei riipu muuttujasta t.

(2) $t\cdot y\in\overline{B}(t\cdot x, r)$ kaikilla $t\in\widehat{[0,T]}$.

Tällöin

$$\|t\cdot x - t\cdot y\| \le \|x-y\|e^{L|T|} \text{ kaikilla } t\in\widehat{[0,T]}. \quad (1.16)$$

Erityisesti, jos $y\to x$, niin ratkaisu $y(t)$ lähestyy ratkaisua $x(t)$ tasaisesti välillä $\widehat{[0,T]}$.

Tod. Voidaan olettaa että $T>0$ (tapaus $T<0$ hoituu vastaavalla tavalla). Tunnetusti ratkaisut $x(t)$ ja $y(t)$ toteuttavat integraaliyhtälöt (kurssi DY II)

$$x(t) = x + \int_0^t f(x(\tau))\,d\tau \text{ ja } y(t) = y + \int_0^t f(y(\tau))\,d\tau,\quad t\in[0,T].$$

Koska oletuksen (2) mukaan $y(\tau) \in \overline{B}(x(\tau), r)$ kaikilla $\tau \in [0,t]$, niin Lipschitz-ominaisuuden (1) perusteella

$$\|f(x(\tau)) - f(y(\tau))\| \le L \, \|x(\tau) - y(\tau)\| , \quad \tau \in [0,t].$$

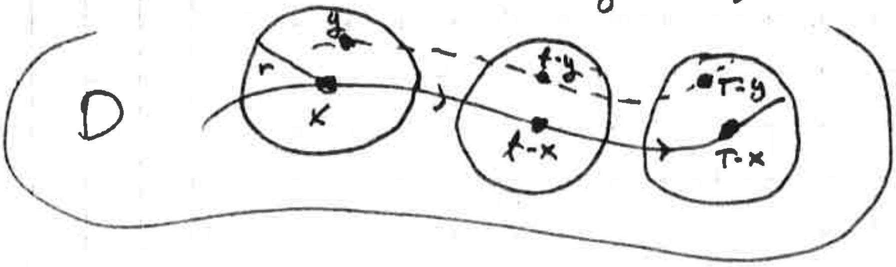
Siten

$$\|x(t)-y(t)\| \le \|x-y\| + \left\| \int_0^t \big(f(x(\tau)) - f(y(\tau))\big) d\tau \right\| \le$$

$$\|x-y\| + \int_0^t \|f(x(\tau)) - f(y(\tau))\| \, d\tau \le \|x-y\| + L \int_0^t \|x(\tau)-y(\tau)\| \, d\tau, \text{ kun } t \in [0,T].$$

Valitaan Gronwallin epäyhtälöön funktiot $u(t) \equiv L$ ja $v(t) = \|x(t)-y(t)\|$ sekä vakio $C = \|x-y\|$. Tällöin sen mukaan kaikilla $t \in [0,T]$ pätee

$$\|x(t)-y(t)\| \le \|x-y\| \exp\left(\int_0^t L \, d\tau\right) \le \|x-y\| \, e^{LT}. \qquad \square$$



Huom. Vastaava tulos pätee myös ei-autonomisille systeemeille (ks. Nagle, Saff, Snider: luku 13-4).

Lause 1.3. Olkoon $f: D \to \mathbb{R}^n$ lokaalisti Lipschitz. Tällöin virtauskuvaus $\phi: \Omega \to D$, $\phi(t,x) = t \cdot x$, on jatkuva. Lisäksi määrittelyjoukko $\Omega \subset \mathbb{R} \times D$ on avoin $\mathbb{R}^{n+1}$:ssä.

Tod. Olkoon $(t,x) \in \Omega$. Voidaan jälleen olettaa että $t > 0$. Valitaan sellainen $0 < \delta < t$, että $t + \delta \in \Delta(x)$ ($t \in \Delta(x)$, $x(0) = x$). Koska kuvajoukko $x([0, t+\delta])$ on kompakti ja f on lokaalisti Lipschitz, löytyy sellainen $r > 0$, että

(1) $\overline{B}\left(x([0,t+\delta]), r\right) = \bigcup_{\tau \in [0,t+\delta]} \overline{B}(\tau \cdot x, r) \subset D$,

(2) kuvaus f on L-Lipschitz kaikilla $\tau \in [0,t+\delta]$ kuulassa $\overline{B}(\tau \cdot x, r)$, ja L ei riipu τ:sta.

Harjoitus. Todista tämä.

Olkoon $\|x-y\| < \delta' = r e^{-L(t+\delta)}$. Osoitetaan, että tällöin $t+\delta \in \Delta(y)$. Tehdään vastaoletus: Tällöin $t^+(y) \le t+\delta$, ja poistumislauseen perusteella löytyy reaaliluku $0 < T < t+\delta$, siten (koska $\overline{B}(x[0,t+\delta], r)$ on kompakti), että $\|T\cdot x - T\cdot y\| = r$ ja $\|\tau\cdot x - \tau \cdot y\| < r$ kaikilla $0 \le \tau < T$. Lisäksi $T \in \Delta(x) \cap \Delta(y)$. Siten lauseen 1.2 oletukset pätevät välillä $[0,T]$. Sen nojalla

$$\|T\cdot x - T\cdot y\| \le \|x-y\| e^{LT} < r e^{-L(t+\delta)} e^{LT} < r.$$

Ristiriita osoittaa, että $t+\delta \in \Delta(y)$. Lisäksi samalla nähtiin että $\tau \cdot y \in \overline{B}(\tau\cdot x, r)$ kaikilla $\tau \in [0,t+\delta]$.

Siis, kun $\|x-y\| < \delta'$ ja $|t-\tau| < \delta$, niin $\tau \in \Delta(y)$, ts. $(\tau, y) \in \Omega$. Siten joukko Ω on avoin.

Olkoon $\varepsilon > 0$. Valitaan $\delta > 0$ kuten lisäksi niin, että $\|\tau \cdot x - t\cdot x\| < \varepsilon/2$, kun $|\tau - t| < \delta$. Valitaan vielä $\delta' > 0$ sopivaksi ~~...~~ että $\|\tau\cdot x - \tau \cdot y\| < \varepsilon/2$ kaikilla $\tau \in [0,t+\delta]$, kun $\|x-y\| < \delta'$. Tämä voidaan, kuten edellä, lauseen 1.2 perusteella tehdä, sillä $\tau\cdot y \in \overline{B}(\tau \cdot x, r)$. Näillä valinnoilla pätee

$$\|t\cdot x - \tau\cdot y\| \le \|t\cdot x - \tau \cdot x\| + \|\tau\cdot x - \tau\cdot y\| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon,$$ kun

$|t-\tau|<\delta$ ja $\|x-y\|<\delta'$. Siis ϕ on jatkuva pisteessä (t,x) ja siten jatkuva. □

Huom. Voidaan osoittaa (Picard, Peano noin 1890) että $\phi \in C^m(\Omega, D)$, jos $f \in C^m(D, \mathbb{R}^n)$, $m \geq 1$, f:n sileys siirtyy virtauksen sileydeksi.

<u>Määritelmä.</u> Olkoon $x \in D$. Radan $\gamma(x)$ <u>rajajoukko</u> positiiviseen suuntaan on

$$\omega(x) = \bigcap_{0<t<t^+(x)} cl_D\left(\gamma^+(t\cdot x)\right). \qquad (1.17)$$

Huomaa että sulkeumat ovat D:ssä ja siten $\omega(x) \subset D$ (kirjallisuudessa näkee sulkeumat otettavan myös $\mathbb{R}^n$:ssä); mutta käytetään vain D:n pisteitä. Niissä systeemi (1.1) on määritelty!

Olkoon $0 \leq s < t$ ja $u \geq 0$. Koska (1.13):n nojalla $u\cdot(t\cdot x) = u\cdot((t-s)+s)\cdot x = u\cdot(t-s)\cdot sx = (u+t-s)\cdot s\cdot x$, niin $u\cdot(t\cdot x) \in \gamma^+(s\cdot x)$, joten

$$\gamma^+(t\cdot x) \subset \gamma^+(s\cdot x) \subset \gamma^+(x) \text{ aina kun } 0 \leq s < t. \quad (1.18)$$

Tästä nimenomaan seuraa että $\omega(x) = \bigcap_{k=1}^{\infty} cl_D\left(\gamma^+(t_k\cdot x)\right)$ jokaisella osajonolla (t_k), jossa $t_k > 0$ ja $t_k \to t^+(x)$, $k \to \infty$.

Vastaavasti rajajoukko negatiiviseen suuntaan on

$$\omega^-(x) = \bigcap_{t^-(x)<t<0} cl_D\left(\gamma^-(t\cdot x)\right). \qquad (1.19)$$

Jos $t^+(x) < \infty$, niin $\omega(x) = \emptyset$ (vastaavasti negatiiviseen suuntaan).

Tod. Olkoon $y \in D$ ja $\overline{B}(y,r) \subset D$. Koska $\overline{B}(y,r)$ on kompakti, poistumislauseen nojalla löytyy sellainen $t > 0$ että $\gamma^+(t\cdot x) \cap \overline{B}(y,r) = \emptyset$. Siten $y \notin cl_D(\gamma^+(t\cdot x)) \supset \omega(x)$. □

Siten on ~~mielekästä~~ tarpeellista puhua rajatilasta (=joukosta) vain kun $t^+(x) = \infty$.

Olkoon $E \subset D$ ja (x_k) jono D:ssä. Merkitään $x_k \to E$, jos jokaista joukon E ympäristöä

U koska löytyy sellainen rajaindeksi k_0, että $x_k \in U$ kaikilla $k \geq k_0$. Vastaavasti määritellään $f \cdot x \to E$, kun $t \to \infty$ (mutta tietysti edellyttäen että $f^+(x) = \infty$). Määritelmät ovat siis suora raja-arvon yleistys koskemaan pisteen (i)jasta joukkoa.

Lemma 1.3. Muodostakoot joukot $A_t \subset \mathbb{R}^n$, $t > 0$, laskevan perheen: $A_t \subset A_s$, kun $t > s$. Olkoot ne lisäksi epätyhjiä, kompakteja ja yhtenäisiä. Tällöin myös leikkaus $A = \bigcap_{t>0} A_t$ on epätyhjä, kompakti ja yhtenäinen.

Tod. Vastaoletus: $A = \emptyset$. Kiinnitetään $t_0 > 0$. Komplementit $U_t = \mathbb{R}^n \setminus A_t$, $t > 0$, muodostavat avoimen peitteen joukolle A_{t_0}, ja koska tämä on kompakti, löytyy äärellinen osapeite

$$\{U_{t_1}, \ldots, U_{t_m}\}, \quad t_1 < t_2 < \cdots < t_m.$$

Siis

$$A_{t_0} \subset \bigcup_{k=1}^{m} U_{t_k}, \text{ joten } A_{t_m} = \bigcap_{k=1}^{m} A_{t_k} = \left(\bigcup_{k=1}^{m} U_{t_k}\right)^c$$

$\subset \mathbb{R}^n \setminus A_{t_0}$, mikä on ristiriidassa joukkoperheen laskevuuden ja epätyhjyyden kanssa. Siis $A \neq \emptyset$.

Koska A on suljettu ja $A \subset A_{t_0}$, se on kompakti. On vielä osoitettava yhtenäisyys. Vastaoletus: $A = B_1 \cup B_2$, $B_1 \cap B_2 = \emptyset$, jossa joukot B_i ovat epätyhjiä ja kompakteja, $i = 1, 2$. Tunnetusti niillä on erilliset ympäristöt U_1 ja U_2. Osoitetaan, että jollakin $t>0$ pätee $A_t \subset U = U_1 \cup U_2$. Merkitään $U_t = \mathbb{R}^n \setminus A_t$. Koska

$$\Big(\bigcup_{t \ge t_0} U_t\Big)^c = \bigcap_{t \ge t_0} A_t = A \subset U \cup A_{t_0}^c = (U^c \cap A_{t_0})^c = (A_{t_0} \setminus U)^c,$$

niin $A_{t_0} \setminus U \subset \bigcup_{t \ge t_0} U_t$, siis joukot U_t, $t \ge t_0$, muodostavat joukon $A_{t_0} \setminus U$ avoimen peitteen. Koska $A_{t_0} \setminus U$ on A_{t_0}:n suljettuna osajoukkona kompakti, löytyy sen äärellinen osapeite $\{U_{t_1}, \dots, U_{t_m}\}$, $t_0 \le t_1 < \dots < t_m$. Koska $U_{t_k} \subset U_{t_m}$, niin $A_{t_0} \setminus U \subset U_{t_m} = \mathbb{R}^n \setminus A_{t_m}$. Koska $A_{t_m} \subset A_{t_0}$, niin $A_{t_m} \subset U = U_1 \cup U_2$. Koska A_{t_m} on yhtenäinen, niin vaikkapa $A_{t_m} \cap U_2 = \emptyset$. Siten $A \subset A_{t_m} \subset U_1$, siis $A = B_1$ ja $B_2 = \emptyset$. Saatu ristiriita osoittaa viimeisen väitteen todeksi. $\square$

Lause 1.4. Olkoon $x \in D$ ja $t^+(x) = \infty$. Tällöin

(a) $\omega(x) = \{y \in D \mid$ löytyy aikajono (t_k), $t_k \to \infty$ ja $t_k \cdot x \to y\}$

(b) $cl_D(\gamma^+(x)) = \gamma^+(x) \cup \omega(x)$

(c) Joukot $cl_D(\gamma^+(x))$ ja $\omega(x)$ ovat suljettuja D:ssä, $\omega(x)$ on invariantti ja $cl_D(\gamma^+(x))$ on positiivisesti invariantti

(d) $\omega(x) = \omega(t \cdot x)$ kaikilla $t \ge 0$.

Jos lisäksi $cl_D(\gamma^+(x))$ on kompakti, niin

(e) $\omega(x)$ on epätyhjä, kompakti ja yhtenäinen.

(f) Kaikilla $y \in \omega(x)$ pätee $\Delta(y) = \mathbb{R}$.

(g) $t \cdot x \to \omega(x)$, kun $t \to \infty$.

Tod. (a) Olkoon $y \in \omega(x)$. Tällöin jokaisella $k \in \mathbb{N}_+$ pätee $\gamma^+(k\cdot x) \cap B(y, 1/k) \neq \emptyset$. Siten löytyy s_k:t, $s_k \geq 0$, joilla $t_k = s_k + k \geq k$ ja $t_k \cdot x = (s_k + k)\cdot x = s_k \cdot k \cdot x \in B(y, 1/k)$. Siis $t_k \to \infty$ ja $t_k \cdot x \to y$. On löydetty kohdan (a) jono (t_k).

Käänteisesti, olkoon (t_k) aikajono, jolla $t_k \to \infty$ ja $t_k \cdot x \to y$. Kiinnitetään $t > 0$. Tällöin suurilla k pätee $t_k \geq t$, joten silloin $t_k \cdot x = (t_k - t)\cdot(t \cdot x) \in \gamma^+(t\cdot x)$. Siten raja-arvolle $t_k \cdot x \to y$ pätee $y \in cl_D(\gamma^+(t\cdot x))$, joten $y \in \omega(x)$.

Kohta (b) seuraa kohdasta (a) ja (1.18):sta. Harj. Osata (b).

(c) Selvästi joukot $cl_D(\gamma^+(x))$ ja $\omega(x)$ ovat suljettuja D:ssä. Olkoon $y \in \omega(x)$ ja $t \in \Delta(y)$. Kohdan (a) nojalla löytyy aikajono (t_k), jolla $t_k \to \infty$ ja $t_k \cdot x \to y$. Lauseen 1.3 (virtauksen jatkuvuus) ja yhtälön (1.13) (virtauksen dynaamisuus) nojalla

$$(t + t_k)\cdot x = t\cdot(t_k \cdot x) \to t \cdot y, \text{ kun } k \to \infty.$$

Luonnollisesti $t + t_k \to \infty$. Kohdan (a) nojalla $t \cdot y \in \omega(x)$; siten joukko $\omega(x)$ on invariantti.

Olkoon $y \in \gamma^+(x)$. Silloin $y = s\cdot x$, $s \geq 0$. Olkoon $t \geq 0$. Yhtälön (1.13) nojalla

$$t\cdot y = t\cdot(s\cdot x) = (t+s)\cdot x \in \gamma^+(x), \text{ sillä } t+s \geq 0.$$

Siten $\gamma^+(x)$ on positiivisesti invariantti. Positiivisesti invarianttien yhdisteenä $cl_D(\gamma^+(x)) = \gamma^+(x) \cup \omega(x)$ (kohta (b)) joukko $cl_D(\gamma^+(x))$ on positiivisesti invariantti.

(d) Myös se on melko selvä, Harj. Todista se, erityisesti yhtälön (1.18) nojalla.

(e) Rata $\gamma^+(t\cdot x)$, $t > 0$, on yhtenäisen välin $[t\cdot x, \infty[$ jatkuvana kuvana yhtenäinen, samoin sen sulkeuma. Loppu seuraa lemmasta 1.3.

(f) Se seuraa kohdasta (c) ja (e).

(g) VO: Löytyy $\omega(x)$:n ympäristö $U \subset \mathbb{R}^n$ ja aikajono (t_k), jolla $t_k \to \infty$ ja $t_k \cdot x \notin U$. Koska $t_k \cdot x \in Cl_D(\gamma^+(x))$, ja tämä joukko on oletuksen mukaan kompakti, jonolla $(t_k \cdot x)$ on kasautumispiste $y \in Cl_D(\gamma^+(x))$. Voidaan siirtyä y:tä kohti suppenevaan osajonoon, jolloin kohdan (a) nojalla $y \in \omega(x) \subset U$. Toisaalta $y \in D \setminus U$, koska tämä joukko on suljettu D:ssä ja $t_k \cdot x \in D \setminus U$. Ristiriita osoittaa kohdan (g) todeksi. ■

Siis jos rata pysyy kompaktissa joukossa, systeemi kulkee kohti lopputilaa, mikä kyllä on ymmärrettävä väljästi rajajoukkona, jota lähestytään. Rajajoukko voi olla dynamiikaltaan kuinka kaoottinen tahansa, tai vaikka yksi piste (kriittinen). Systeemin lopputilan tutkimuksen historiaan liittyy 1800-luvulla järjestetty kilpailu (Ruotsin kuninkaallinen Akatemia). Piti osoittaa, että aurinkokunnan kappaleiden liikkeiden järjestelmä säilyy hamaan tuomiopäivään asti. Kilpailun voitti Poincaré, sai huomattavan summan rahaa ja joutui toteamaan, ettei asia olekaan niin yksinkertainen kuin päälle saattoi näyttää. Syntyi dynaamisten systeemien tutkimus.

Autonomisten systeemien lopputilasta tasossa tiedetään paljonkin, erityisesti Poincarén–Bendixsonin lause, joka todistetaan kurssin lopussa kohokohtana. Siinä systeemin dimensio $n=2$ näyttelee tärkeää osaa, kuten tullaan näkemään.

Kiinnostuksen kohteena kurssissa on toinenkin asia, ratkaisujen stabiilisuuskysymykset. Tämä koskee erityisesti autonomisten systeemien kriittisiä pisteitä eli tasapainotiloja. Ne kiinnostavat myös soveltajia. Vilkaistaan esimerkki epidemiologiasta:

Populaation nollatila sairaissa on tasapainotila. Jos se on stabiili, ja muutama sairas tartuttaja tuodaan populaatioon, epidemiaa ei synny. Mutta jos tila on epästabiili, epidemia syntyy ennemmin tai myöhemmin. Seikat, jotka vaikuttavat stabiilisuuteen ~~epästabiilisuuteen~~, kiinnostavat luonnollisesti epidemiologeja. Näitä ovat esimerkiksi rokotukset.

II Lineaariset ja melkein lineaariset systeemit

II.1 Stabiilisuus, lineaariset systeemit

Lauseen 1.3 mukaan virtaus on jatkuva, ja siten tasaisesti jatkuva kompaktissa joukossa. Siis kun kiinnitetään $t_0 \in D(x)$, vaikkapa $t_0 > 0$, ja $\varepsilon > 0$, niin löytyy sellainen $\delta > 0$, että

$$\|t \cdot x - t \cdot y\| < \varepsilon \text{ kaikilla } t \in [0, t_0] \text{ ja } y \in B(x, \delta).$$

Ratkaisujen $x(t)$ ja $y(t)$ ei kuitenkaan tarvitse pysyä toistensa lähellä loputtomiin, ja voi käydä niinkin että ne välillä loittonevat palatakseen lopulta toistensa läheisyyteen.

kuva lineaarisen systeemin mahdollisesta virtauksesta

Muistutetaan, että autonomisen systeemin (1.1) kriittinen piste x_0, so. $f(x_0)=\bar{0}$, määrittelee systeemin vakioratkaisun $t\cdot x_0 \equiv x_0$, tasapainotilan. Taas sovitaan, funktio $f: D \to \mathbb{R}^n$ on vähintään lokaalisti Lipschitz.

Määritelmä 2.1. Autonomisen systeemin (1.1) kriittinen piste x_0 on stabiili, jos jokaista $\varepsilon>0$ kohti löytyy sellainen $\delta>0$, että kun $\|x-x_0\|<\delta$, niin systeemin (1.1) ratkaisulle $x(t)=t\cdot x$ pätee

$$\|x(t)-x_0\|<\varepsilon \quad \text{kaikilla } t\geq 0. \tag{2.1}$$

Kriittinen piste x_0 on asymptoottisesti stabiili, jos se on stabiili ja löytyy sellainen $\eta>0$, että kun $\|x-x_0\|<\eta$, niin ratkaisulle $x(t)=t\cdot x$ pätee

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = x_0 . \tag{2.2}$$

Jos x_0 ei ole stabiili, se on epästabiili.

On hyvä huomata, että (2.1) sisältää vaatimuksen, että ratkaisu $x(t)=t\cdot x$ on olemassa kaikilla $t\geq 0$, kun pätee $\|x-x_0\|<\delta$. Ajan rajakohdan $t_0=0$ sijasta voitaisiin valita yhtä hyvin minkä tahansa $t_0\in\mathbb{R}$, mikä seuraa autonomisen systeemin translaatio-invarianssista.

Esimerkki. Lineaarisen 2×2-systeemin eli parin

$$\dot{x}=Ax, \quad A=\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 0 & -3\end{bmatrix},$$

perusjärjestelmä on $x_1(t)=(e^{-2t},0)$, $x_2(t)=(0,e^{-3t})$, ja yleinen ratkaisu on $x(t)=c_1x_1(t)+c_2x_2(t)$. Systeemillä on kriittinen piste $\bar{0}=(0,0)$. Tämä on selvästi asymptoottisesti stabiili, vieläpä <u>globaalisti asymptoottisesti stabiili</u>, sillä kaikille systeemin ratkaisuille pätee $\lim_{t\to\infty} x(t)=\bar{0}$. Globaalisuus on tyypillistä lineaarisille systeemeille.

Jos matriisiksi valitaan vaikkapa $A=\begin{bmatrix}2&0\\0&-3\end{bmatrix}$, kriittisestä pisteestä $\bar{0}$ tulee epästabiili.

Stabiilisuuden ei tarvitse rajoittua vakioratkaisuihin eikä autonomisiin systeemeihin. Siirrytään heti epäautonomiseen suuntaan ja tarkastellaan systeemiä

$$\dot{x}=f(t,x), \qquad (2.3)$$

jossa f on jatkuva ja x:n suhteen lokaalisti tasaisesti Lipschitz jossain $\mathbb{R}^{n+1}$:n alueessa, jossa siten pätee OY-lause.

<u>Määritelmä 2.2.</u> (Lyapunov-stabiilisuus) Olkoon $x(t)$ systeemin (2.3) ratkaisu, joka on olemassa (ainakin) arvoilla $t\ge t_0$. Se on <u>stabiili</u> kohdasta t_0 eteenpäin, jos jokaista $\varepsilon>0$ ja $t_1\ge t_0$ kohti löytyy sellainen $\delta>0$, että jos $\|y(t_1)-x(t_1)\|<\delta$, niin systeemin (2.3) ratkaisulle $y(t)$ pätee

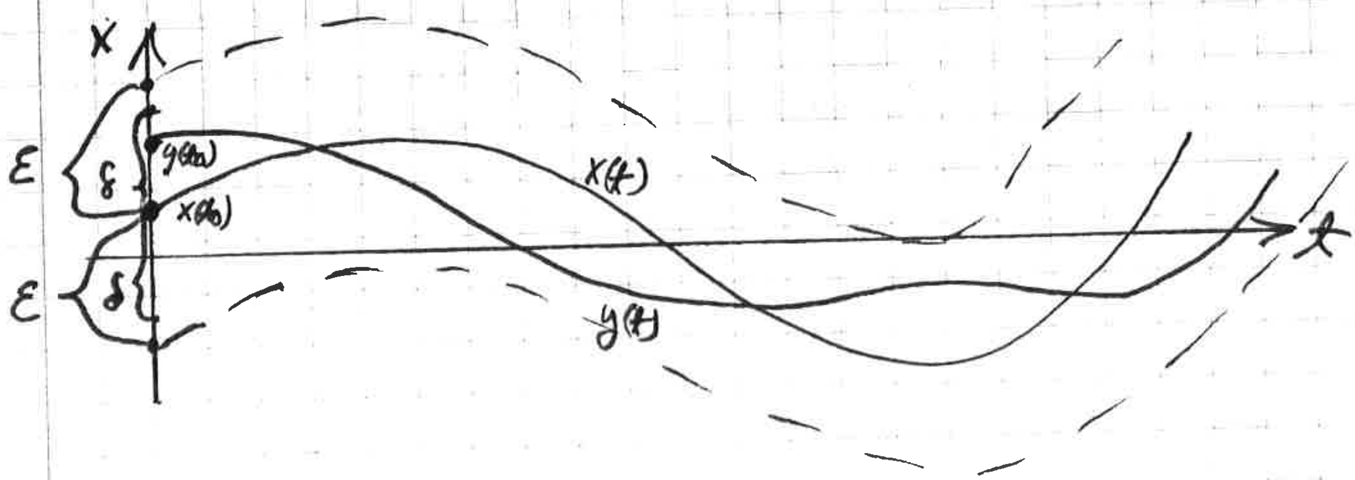
$$\|y(t)-x(t)\|<\varepsilon \quad \text{kaikilla } t\ge t_1. \qquad (2.4)$$

Ratkaisu $x(t)$ on asymptoottisesti stabiili, jos se on stabiili hetkellä t_0 ja löytyy sellainen $\eta > 0$, että jos $\|y(t_0) - x(t_0)\| < \eta$, niin systeemin (2.3) ratkaisulle $y(t)$ pätee

$$\lim_{t \to \infty} \|y(t) - x(t)\| = 0 . \qquad (2.5)$$

Huom. Voidaan osoittaa (Cesari 1971), että määritelmän 2.2 stabiilisuuskohdassa riittää pelkkä t_0. Nimittäin, jos (2.4) pätee t_0:lle, se pätee kaikilla $t_1 \geq t_0$ (luonnollisestikaan ei välttämättä päde, jos $t_1 < t_0$). Autonomisen systeemin osalta ei oikeastaan pitäisi puhua stabiilisuudesta kohdasta t_0, vaan kohdasta $x_0 = x(t_0)$ eteenpäin, translaatio-invariantisuudesta. Itse miltä arvolta lähtee kohdalla ei ole silloin väliä.

Määritelmän 2.2 loppuosassa Cesarin tulos on jo otettu huomioon. Määritelmät 2.1 ja 2.2 ovat alkuehdon osalta lokaaleja (säteet δ ja η).



Aloitetaan stabiilisuustarkastelut lineaarisista systeemeistä

$$\dot{x} = A(t)x + f(t), \qquad (2.6)$$

jonka siis ei tarvitse olla autonominen. Oletetaan, että funktiot $A(t)$ ja $f(t)$ ovat jatkuvia jollain avoimella välillä $\Delta \subset \mathbb{R}$, joka ulottuu plusäärettömään. OY-lauseen ehdot on täytetty $\mathbb{R}^{n+1}$:n alueessa $\Delta \times \mathbb{R}^n$) ja sen globaalin version mukaan ratkaisut ovat olemassa koko välillä Δ (lause OY II).

Olkoon $x(t)$ systeemin (2-6) ratkaisu, ja olkoon $y(t)$ jokin toinen ratkaisu. Silloin $z(t)=y(t)-x(t)$ on vastaavan homogeenisysteemin

$$\dot{x} = A(t)x \tag{2-7}$$

ratkaisu. Systeemillä (2-7) on ilmeisesti nollaratkaisu $\bar{0}$. Tunnetusti systeemillä (2-7) on välillä Δ perusjärjestelmä $(x_1(t), \ldots, x_n(t))$, jonka lineaarikombinaationa saadaan sen kaikki ratkaisut. Lineaarisuudesta seuraa, että (2-6):n ratkaisu $x(t)$ on stabiili tai asymptoottisesti stabiili täsmälleen silloin, kun $\bar{0}$ on stabiili tai asymptoottisesti stabiili homogeenisysteemin (2-7) ratkaisu. Erityisesti, jos lineaarisen systeemin yksikin ratkaisu on stabiili tai asymptoottisesti stabiili, kaikki sen ratkaisut ovat samaa laatua. On hyvä huomata, että määritelmässä 2.2 ajanhetkellä t_0 ei ole lineaarisessa systeemissä väliä, mikä tulee esiin seuraavassa lemmassa.

Asymptoottisen stabiilisuuden tapauksessa kaikki ratkaisut menevät samaa rajaa kohti:

$$\lim_{t\to\infty} \| y(t)-x(t) \| = 0.$$

Lineaarisen systeemin stabiilisuuden luonne on siis globaali, ja näin ei ole yleensä asian laita epälineaarisessa systeemissä. Lineaarisessa tapauksessa voidaan puhua yleisluontoisesti systeemin stabiilisuudesta tai epästabiilisuudesta.

<u>Lemma 2.1.</u> Homogeenisen systeemin (2-7) nollaratkaisu $\bar{0}$ on mielivaltaisesta $t_0 \in \mathbb{R}$ lähtien

stabiili (eli systeemi on stabiili) jos ja vain silloin, kun sen perusjärjestelmän funktiot $x_k(t)$, $1 \le k \le n$, ovat rajoitettuja kun $t \to \infty$ (eli jostain $a \in \mathbb{R}$ lähtien).

Vakioratkaisu $\bar{0}$ on asymptoottisesti stabiili jos ja vain silloin, kun $\lim_{t \to \infty} x_k(t) = \bar{0}$ kaikilla $1 \le k \le n$.

Tod. Oletetaan että perusjärjestelmän funktiot $x_k(t)$ ovat rajoitettuja välillä $[a, \infty[$, jossa $a \in \mathbb{R}$. Olkoon $x(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k x_k(t) = \underline{X}(t) c$ systeemin (2.7) ratkaisu, jolla $\|x(t_0)\| < \delta$. On merkitty $\underline{X}(t) = [x_1(t) \cdots x_n(t)]$ ja $c = (c_1, \ldots, c_n)$. Koska perusmatriisin $\underline{X}(t)$ determinantille eli Wronskille pätee

$$\det \underline{X}(t_0) = W(x_1, \ldots, x_n)(t_0) \neq 0,$$

niin $c = \underline{X}(t_0)^{-1} x(t_0)$, joten

$$\|c\| \le \|\underline{X}(t_0)^{-1}\| \, \|x(t_0)\| < \delta \, \|\underline{X}(t_0)^{-1}\|.$$

Koska $x_k(t)$:t ovat rajoitettuja, löytyy sellainen $M > 0$, että $\|\underline{X}(t)\| \le M$ kaikilla $t \ge a$. Siten

$$\|x(t)\| = \|\underline{X}(t) c\| \le \|\underline{X}(t)\| \, \|c\| < M \delta \, \|\underline{X}(t_0)^{-1}\|.$$

Kun $\varepsilon > 0$ ja $t_0 \in \mathbb{R}$, voidaan valita $a \le t_0$ ja $\delta = \varepsilon M^{-1} \|\underline{X}(t_0)^{-1}\|^{-1}$. Tällöin $\|x(t)\| < \varepsilon$ kaikilla $t \ge t_0$, kun $\|x(t_0)\| < \delta$, siis $\bar{0}$ on stabiili.

~~Käänteen~~, olkoon $\bar{0}$ stabiili. Tarkastellaan ratkaisua $c_k x_k(t)$. Tarpeeksi pienillä c_k se on rajoitettu. Siten $x_k(t)$ on rajoitettu, kun $t \to \infty$.

Jos $\bar{0}$ on asymptoottisesti stabiili, niin $\lim_{t \to \infty} x_k(t) = \bar{0}$. Käänteinen tulos on alkuosan perusteella selvä. □

Vakiomatriisin tapauksessa stabiilisuus voidaan luonnehtia matriisin ominaisarvojen avulla. (30)

Lause 2-1. Olkoon homogeenisysteemin (2-7) matriisi A vakio, ja olkoot ~~sen~~ ominaisarvot λ_k, $1 \le k \le n$.

(a) Jos systeemi (2-7) on stabiili, niin $Re(\lambda_k) \le 0$ kaikilla $1 \le k \le n$.

(b) Jos $Re(\lambda_k) < 0$ ja mahdollisesti $Re(\lambda_k) = 0$ ainoastaan, kun ominaisarvo λ_k on yksinkertainen, niin systeemi (2-7) on stabiili.

(c) Systeemi (2-7) on asymptoottisesti stabiili jos ja vain silloin, kun $Re(\lambda_k) < 0$ kaikilla $1 \le k \le n$.

Tod. Seuraa tunnetusta perusjärjestelmästä, jossa ominaisarvot esiintyvät (DQII), ja lemmasta 2-1. □

Esimerkki. Homogeenisysteemin $\dot{x} = Ax$, $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, ominaisarvot ovat $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, kaksinkertainen nolla. Kuitenkin systeemi on lemman 2-1 perusteella stabiili, sillä sen perusmatriisi

$$X(t) = [x_1(t) \ \ x_2(t)] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ on rajoitettu.}$$

Jos valitaan $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, ominaisarvot ovat samat $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, mutta nyt systeemi on epästabiili, sillä perusmatriisi

$$X(t) = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ on rajoittamaton, kun } t \to \infty.$$

Esimerkki. Tarkastellaan 2. kl. lineaarista skalaariyhtälöä $\ddot{u} - u = 0$. Se saadaan palautettua 1. kl. lineaariseksi pariksi sijoituksella $x_1 = u$, $x_2 = \dot{u}$ ja $x = (x_1, x_2)$, Ja tämä puoli on

$\dot{x} = Ax$, jossa $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Matriisin A ominaisarvot ovat $\lambda_1 = 1 > 0$ ja $\lambda_2 = -1$. Lauseen 2.1 mukaan systeemi ja siten myös alkuperäinen skalaariyhtälö (tämä on määritelmä) on epästabiili. Systeemin perusmatriisi on rajoittamaton:

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} e^t & e^{-t} \\ e^t & -e^{-t} \end{bmatrix}.$$

<u>Esimerkki.</u> Tarkastellaan skalaariyhtälöä $\ddot{u} + 2k\dot{u} + u = 0$, jossa on parametri $k \in \mathbb{R}$. Vastaava 1-kl. systeemi on

$$\dot{x} = Ax, \text{ jossa } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2k \end{bmatrix}.$$

Matriisin A ominaisarvot: $\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -2k-\lambda \end{vmatrix} =$

$\lambda^2 + 2k\lambda + 1 = 0 \iff \lambda = -k \pm (k^2-1)^{1/2}$.

Jos $k \geq 1$, ominaisarvot ovat reaaliset ja negatiiviset. Jos $0 < k < 1$, ominaisarvot ovat aidosti kompleksiset, mutta reaaliosat ovat negatiiviset. Lauseen 2.1 mukaan kummassakin tapauksessa systeemi (ja skalaariyhtälö) on asymptoottisesti stabiili.

Jos taas $k < 0$, systeemi on epästabiili. ~~...~~ ~~...~~ Tapauksessa $k = 0$ systeemi on stabiili.

Seuraavaksi tutkitaan lineaarista systeemiä

$$\dot{x} = (A + B(t))x, \tag{2-8}$$

jossa matriisi A on vakio ja matriisifunktio $B(t)$ on jatkuva. Ajatuksena on verrata stabiilisuudessa systeemiä (2-8) vastaavaan vakiokertoimiseen systeemiin $\dot{x} = Ax$. Jos $B(t)$ on "pieni" suurilla t:n arvoilla, voi olettaa että stabiilisuuden laatu on sama!

Lemma 2-2. Olkoon A vakio ja olkoon $\underline{X}(t)$ systeemin $\dot{x} = Ax$ perusmatriisi. Tällöin pätee

$$\underline{X}(t)\,\underline{X}(s)^{-1} = \underline{X}(t-s+t_0)\,\underline{X}(t_0)^{-1}. \qquad (2\text{-}9)$$

Tod. Perusmatriisi toteuttaa matriisidifferentiaaliyhtälön $\dot{\underline{X}} = A\underline{X}$, ja niin tekee myös matriisifunktio $t \mapsto \underline{X}(t-s+t_0)$, koska A on vakio. Siispä matriisifunktiot $\Phi(t) = \underline{X}(t)\,\underline{X}(s)^{-1}$ ja $\underline{Z}(t) = \underline{X}(t-s+t_0)\underline{X}(t_0)^{-1}$ toteuttavat kyseisen yhtälön. Lisäksi $\Phi(s) = \underline{Z}(s) = I$ (= identtinen matriisi). OY-lauseen yksikäsitteisyysosasta, sovellettuna sarakevektoreihin, seuraa että $\Phi(t) = \underline{Z}(t)$. □

Lemma 2-3. Olkoon A vakio, olkoon $x(t)$ lineaarisen systeemin

$$\dot{x} = Ax + f(t) \qquad (2\text{-}10)$$

ratkaisu, jolla $x(t_0) = x_0$, ja olkoon $\underline{X}(t)$ vastaavan homogeenisysteemin $\dot{x} = Ax$ perusmatriisi. Tällöin

$$x(t) = \underline{X}(t)\,\underline{X}(t_0)^{-1}x_0 + \int_{t_0}^{t} \underline{X}(t-s+t_0)\,\underline{X}(t_0)^{-1}f(s)\,ds. \quad (2\text{-}11)$$

Tod. Tunnetusti (kurssi DY II) ratkaisu $x(t)$ voidaan esittää muodossa $x(t) = \underline{X}(t)\int^{t} \underline{X}(s)^{-1}f(s)\,ds$, josta saadaan alkuehto $x(t_0) = x_0$ huomioimalla

$$x(t) = \underline{X}(t)\,\underline{X}(t_0)^{-1}x_0 + \int_{t_0}^{t} \underline{X}(t)\,\underline{X}(s)^{-1}f(s)\,ds.$$

Muoto (2-11) seuraa välittömästi lemmasta 2.2. □

Lause 2-2. Jos vakiomatriisin A ominaisarvojen reaaliosat ovat negatiiviset, matriisifunktio $B(t)$ on välillä $t \geq t_0$ jatkuva ja

$$b = \int_{t_0}^{\infty} \|B(t)\|\, dt < \infty, \qquad (2\text{-}12)$$

niin lineaarinen systeemi (2-8) on asymptoottisesti stabiili.

Jos A:n osalta oletetaan vain, että systeemi $\dot{x} = Ax$ on stabiili, niin myös systeemi (2-8) on stabiili.

Tod. Kirjoitetaan (2-8) muodossa $\dot{x} = Ax + B(t)x$. Olkoon $x(t)$ systeemin (2-8) ratkaisu. Kirjoitetaan $f(t) = B(t)x(t)$ jolloin $x(t)$ toteuttaa systeemin (2-10), jossa syötteenä $f(t)$. Olkoon $\underline{X}(t)$ systeemin $\dot{x} = Ax$ perusratkaisu. Lemman 2.3 mukaan pätee

$$x(t) = \underline{X}(t)\underline{X}(t_0)^{-1}x_0 + \int_{t_0}^{t} \underline{X}(t-s+t_0)\underline{X}(t_0)^{-1}B(s)x(s)\, ds,$$

josta saadaan arvio

$$\|x(t)\| \le \|\underline{X}(t)\|\|\underline{X}(t_0)^{-1}\|\|x_0\| + \int_{t_0}^{t} \|\underline{X}(t-s+t_0)\|\|\underline{X}(t_0)^{-1}\|\|B(s)\|\|x(s)\|\, ds. \qquad (2\text{-}13)$$

Olkoot A:n ominaisarvojen reaaliosat negatiiviset. Helposti nähdään, että silloin löytyy sellaiset vakiot $M > 0$ ja $m > 0$, että (vaihe ~~[illegible]~~ suraavaksi)

$$\|\underline{X}(t)\| \le M e^{-mt} \text{ kaikilla } t \ge t_0. \qquad (2\text{-}14)$$

Arvioista (2.13–14) saadaan (lyhyesti $\|\underline{X}(t_0)^{-1}\| = a > 0$)

$$\|x(t)\| e^{mt} \le aM\|x_0\| + \int_{t_0}^{t} \left(\|x(s)\| e^{ms}\right)\left(aMe^{-mt_0}\|B(s)\|\right) ds,$$

sillä $\|\underline{X}(t-s+t_0)\| \le Me^{-mt}e^{ms}e^{-mt_0}$. Gronwallin epäyhtälöä voidaan sovelletaan

$u(t) = aMe^{-mt_0}\|B(t)\|$, $v(t) = \|x(t)\|e^{mt}$ ja $c = aM\|x_0\|$.

Sen ja oletuksen (2-12) mukaan pätee

$$\|x(t)\| e^{mt} \le aM\|x_0\| \exp\left(\int_{t_0}^{t} aMe^{-mt_0}\|B(s)\|ds\right) \le aM\|x_0\|$$

$$* \exp\left(aMe^{-mt_0}\int_{t_0}^{\infty}\|B(s)\|ds\right) = aM\|x_0\| \exp\left(abMe^{-mt_0}\right) = d$$

kaikilla $t \ge t_0$. Siten $\|x(t)\| \le d e^{-mt}$ kaikilla $t \ge t_0$.

Erityisesti tämä pätee systeemin (2-8) perusjärjestelmän funktiolle. Siten lemman 2-1 mukaan systeemi (2-8) on asymptoottisesti stabiili.

Olkoon lopuksi systeemi $\dot{x}=Ax$ vain stabiili. Lemmasta 2-1 seuraa, että silloin löytyy sellainen vakio $M>0$, että

$$\|X(t)\| \leq M \quad \text{kaikilla } t \geq t_0.$$

Vastaavasti kuin edellä saadaan arvio $\|x(t)\| \leq d$ kaikilla $t \geq t_0$. Loppuväite seuraa nyt lemmasta 2-1. □

<u>Huom.</u> Loppuosaan ei riitä, että ominaisarvojen reaaliosat ovat ei-positiiviset, sillä tämä ei takaisi rajoittuneisuutta perusmatriisille (vrt. lause 2-1 (b)). Lauseen 2-2 oletuksista voidaan muunnella, erityisesti matriisifunktion $B(t)$ osalta, kts. Brauer-Nohel, luku 4.3.

<u>Esimerkki.</u> Osoitetaan että 2-kl. skalaariyhtälö $\ddot{u}+a\dot{u}+(b+cte^{-t})u=0$ on asymptoottisesti stabiili kaikilla parametrien arvoilla $a>0$, $b>0$ ja $c\in\mathbb{R}$.

Vastaava 1-kl. systeemi on

$\dot{x}=Ax+B(t)x$, jossa $x=(u,\dot{u})$, $A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -b & -a\end{bmatrix}$ ja $B(t)=\begin{bmatrix}0 & 0\\ -cte^{-t} & 0\end{bmatrix}$.

Vakiomatriisin A ominaisarvot:

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}-\lambda & 1\\ -b & -a-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2+a\lambda+b=0 \Leftrightarrow \lambda=\frac{-a\pm\sqrt{a^2-4b}}{2}.$$

Kun $a>0$ ja $b>0$, reaaliosat ovat negatiiviset.

Voidaan valita mielivaltainen t_0. Silloin

$$\int_{t_0}^{\infty}\|B(t)\|\,dt=|c|\int_{t_0}^{\infty}|t|e^{-t}\,dt<\infty.$$

Asymptoottinen stabiilisuus seuraa lauseesta 2-2.

Olisi aika houkuttelevaa ajatella, että muotoa $\dot{x} = A(t)x$ oleva lineaarinen homogeeninen systeemi olisi stabiili, jos kaikilla (kiinnitetyillä) $t \geq t_0$ matriisin $A(t)$ ominaisarvojen reaaliosat olisivat negatiiviset, ainakin jos löytyisi $a>0$, jolla $\mathrm{Re}(\lambda_k(t)) \leq -a$ kaikilla $t \geq t_0$ ja $1 \leq k \leq n$. Näin ei kuitenkaan ole asian laita.

Vastaesimerkki: Olkoon

$$A(t) = \begin{bmatrix} -1-9\cos^2 6t + 12\sin 6t\cos 6t & 12\cos^2 6t + 9\sin 6t\cos 6t \\ -12\sin^2 6t + 9\sin 6t\cos 6t & -1-9\sin^2 6t - 12\sin 6t\cos 6t \end{bmatrix},$$

jolloin ominaisarvot ovat vakiot $\lambda_1 = -1$ ja $\lambda_2 = -10$. Kuitenkin systeemin $\dot{x} = A(t)x$ perusmatriisi on

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} e^{2t}(\cos 6t + 2\sin 6t) & e^{-13t}(\sin 6t - 2\cos 6t) \\ e^{2t}(\cos 6t - \sin 6t) & e^{-13t}(2\sin 6t + \cos 6t) \end{bmatrix},$$

joka on rajoittamaton. Lemman 2.1 mukaan systeemi $\dot{x} = A(t)x$ on epästabiili.

II.2 Melkein lineaariset systeemit

Tarkastellaan aluksi autonomista systeemiä (1.1), ts. $\dot{x} = f(x)$. Olkoon x_0 sen kriittinen piste: $f(x_0) = 0$. Olkoon f lisäksi differentioituva pisteessä x_0 (mitä Lipschitz-ehto ei vielä takaa). Vakiofunktio x_0 on (1.1):n ratkaisu, tasapainotila. Olkoon $x(t)$ systeemin (1.1) toinen ratkaisu. Merkitään

$$y(t) = x(t) - x_0,$$ jolloin differentiaaliyhtälö antaa

$$\dot{y} = \dot{x} = f(x) = f(x_0+y) = \overbrace{f(x_0)}^{=0} + (Df)(x_0)y + g(y) = (Df)(x_0)y + g(y),$$

missä $(Df)(x_0)$ on f:n derivaatta (matriisi) pisteessä x_0 ja

$$g(y) = y^T O(y), \text{ t.s. } \lim_{y \to \bar{0}} \frac{\|g(y)\|}{\|y\|} = 0.$$

Kun vielä merkitään $A = (Df)(x_0)$, saadaan autonomiseen systeemi

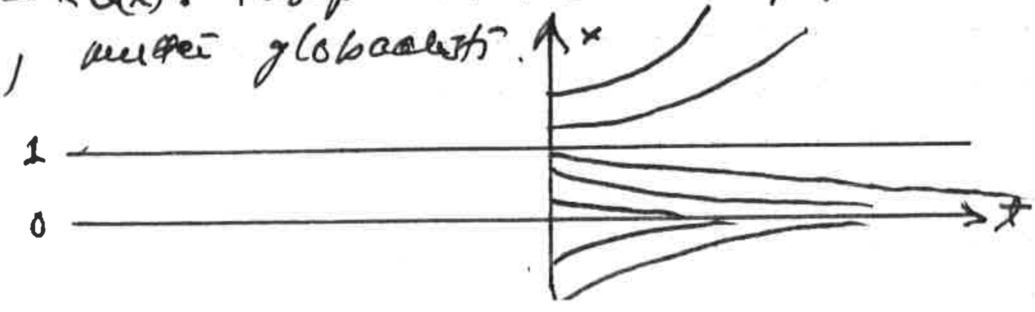
$$\overset{\circ}{x} = Ax + g(x), \tag{2-15}$$

jossa A on vakio ja $g(x) = x^T O(x)$ on lokaalisti Lipschitz (samasta syystä, että f on lokaalisti Lipschitz). Systeemin (2-15) toteuttaa siis $y(t)$, merkinnällä $x(t)$, ja lisäksi vakiofunktio $\bar{0}$ vastaten (1-1):n ratkaisua x_0. On siis osoitettu seuraava (tasapainotilan siirto origoon):

Systeemin (1-1) tasapainotila x_0 on stabiili tai asymptoottisesti stabiili tasan silloin, kun vakiofunktio $\bar{0}$ on sitä systeemissä (2-15).

Autonomisen systeemin tasapainotila voidaan siis aina muuntaa nollaksi, ja päästään muotoa (2-15) olevaan systeemiin (jos f on differentioituva tasapainopisteessä). On syytä muistaa, että stabiilisuuden luonne on nyt lokaali, sillä systeemit (1-1) ja (2-15) eivät ole lineaarisia.

Esimerkki. yksidimensionaalinen systeemi, skalaariyhtälö $\overset{\circ}{x} = -x + x^2$ on muotoa (2-15). Erityisesti $g(x) = x^2 = x\,O(x)$. Tasapainotila 0 on asymptoottisesti stabiili, muttei globaalisti.



Tasapainotila 1 on puolestaan epästabiili.

Yleistetään systeemi (2-15) epäautonomiseen suuntaan. Tutkitaan systeemiä

$$\dot{x} = Ax + f(t,x), \qquad (2\text{-}16)$$

tai vielä yleisempää systeemiä

$$\dot{x} = A(t)x + f(t,x), \qquad (2\text{-}17)$$

jossa jollakin t_0 pätee

$$\|f(t,x)\| \leq \|x\| \, \|O(x)\| \text{ kaikilla } t \geq t_0, \qquad (2.18)$$

t.s. $\lim\limits_{x\to\bar{0}} \frac{\|f(t,x)\|}{\|x\|} = 0$ tasaisesti t:n suhteen joukossa $[t_0,\infty[$.

Systeemi (2-15) toteuttaa ehdon (2-18) automaattisesti. Systeemissä (2-16) matriisi A on vakio, systeemissä (2-17) $A(t)$ on jatkuva matriisifunktio. Välttämättä $\bar{0}$ on kummankin systeemin ratkaisu, sillä $f(t,\bar{0}) \equiv \bar{0}$.

Epälineaarista systeemiä (2-17) kutsutaan häirityksi (perturbed system), ja siihä häiritään vastaavaa lineaarista systeemiä $\dot{x} = A(t)x$, jota näissä yhteyksissä kutsutaan häiritsemättömäksi (unperturbed).

Perusajatus on, että jos häiriö $f(t,x)$ on pieni — mitä ilmaistaan ehdossa (2-18) — niin häiritsemättömän systeemin stabiilisuusominaisuudet säilyvät häiritessä, nyt melkoisen lineaarisiksi kutsutussa systeemissä.

Seuraava lause on osa klassista Poincarén ja Perronin stabiilisuusteoriaa.

Lause 2-3. Olkoon A vakiomatriisi, jonka ominaisarvojen reaaliosat ovat negatiiviset. Olkoon funktio $f(t,x)$ jatkuva ja lokaalisti tasaisesti Lipschitz-jatkuva muuttujan x suhteen alueessa

$$]a,\infty[\times \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < b\}, \qquad (2\text{-}19)$$

jossa $a \geq 0$ ja $b > 0$. Olkoon f lisäksi niin pieni, että se toteuttaa ehdon (2-18) joukossa $]a,\infty[$. Tällöin vakioratkaisu $\bar{0}$ on asymptoottisesti stabiili systeemissä (2-16).

Tod. Kiinnitetään $t_0 > a$. Olkoon $\|x_0\| < b$, ja olkoon $x(t)$ systeemin (2-16) ratkaisu, joka toteuttaa alkuehdon $x(t_0) = x_0$. OP-lauseen mukaan sellainen lokaali ratkaisu on olemassa, mutta on erikseen todistettava, että se on olemassa kaikilla arvoilla $t \geq t_0$, kun $\|x_0\|$ on valittu kyllin pieneksi. Periaatteessa seurataan tyyliä, jota käytettiin jo lauseen 1-3 todistuksessa, kuten kohta nähdään.

Olkoon $X(t)$ systeemin $\dot{x} = Ax$ perusmatriisi. Tarvittaessa sopivalla vakiomatriisilla oikealta kertomalla päästään tilanteeseen, jossa $X(t_0) = I$ (tämä kertoja on $X(t_0)^{-1}$). Sovelletaan ratkaisuun $x(t)$ lemmaa 2.3 valitsemalla siinä "$f(t) = f(t, x(t))$". Sen mukaan niillä arvoilla $t \geq t_0$, joilla ratkaisu $x(t)$ on olemassa, pätee

$$x(t) = X(t)x_0 + \int_{t_0}^{t} X(t-s+t_0)\, f(s, x(s))\, ds. \qquad (2\text{-}20)$$

Koska A:n ominaisarvojen reaaliosat ovat negatiiviset, pätee (2.14):

$$\|X(t)\| \leq M e^{-mt} \text{ kaikilla } t \geq t_0 \quad (M, m > 0). \qquad (2\text{-}21)$$

Ehdon (2-18) mukaan löytyy sellainen $0 < \delta_0 < b$, että

$$\|f(t,x)\| \le \frac{m}{2M}\|x\| \text{ kaikilla } t \ge t_0, \quad (2.22)$$

kun $\|x\| \le \delta_0$. Valitaan nyt sellainen δ, että

$$0<\delta \le \min(\delta_0, \delta_0/M),$$

ja tarkastellaan systeemin (2-16) mielivaltaista ratkaisua $x(t)$, jonka vain pätee alkuehto

$$\|x(t_0)\| = \|x_0\| < \delta.$$

Oletetaan aluksi, että ratkaisuväli ei olisi plus äärettömään. Silloin poistumislauseen, sen yleisen muodon, nojalla löytyy sellainen $t_1 > t_0$, että

$$\|x(t_1)\| = \delta_0 \text{ ja } \|x(t)\| < \delta_0 \text{ kaikilla } t_0 \le t < t_1. \quad (2\text{-}23)$$

Arvioiden (2-20–23) mukaan arvoilla $t_0 \le t < t_1$ pätee

$$\|x(t)\| \le Me^{-mt}\|x_0\| + \int_{t_0}^{t} Me^{-mt}e^{ms}e^{-mt_0}\cdot\frac{m}{2M}\|x(s)\|\,ds,$$

joten silloin

$$\|x(t)\|e^{mt} \le M\|x_0\| + \int_0^t \frac{1}{2}m\left(\|x(s)\|e^{ms}\right)ds. \quad (2\text{-}24)$$

Asetetaan $u(t) = \frac{1}{2}m$, $v(t) = \|x(t)\|e^{mt}$ ja $c = M\|x_0\|$. Gronwallin epäyhtälön ja (2-24):n mukaan

$$\|x(t)\|e^{mt} \le M\|x_0\| \exp\left(\int_0^t \frac{1}{2}m\,ds\right) = M\|x_0\|e^{\frac{1}{2}mt},$$

joten $\|x(t)\| \le M\|x_0\|e^{-\frac{1}{2}mt} < \delta M e^{-\frac{1}{2}mt} \le \delta_0 e^{-\frac{1}{2}mt}$

kaikilla $t_0 \le t \le t_1$, mikä on ristiriidassa ehdon (2-23) kanssa.

Saatu ristiriita osoittaa, ettei arvoa t_1 ole, joten

(1) Ratkaisu $x(t)$ on olemassa kaikilla $t \ge t_0$.

(2) $\|x(t)\| < \delta_0$ kaikilla $t \ge t_0$.

Kohdasta (2) erityisesti seuraa, että arvio $\|x(t)\| \le \delta_0 e^{-\frac{1}{2}mt}$ pätee kaikilla $t \ge t_0$, kunhan vain $\|x(t_0)\| < \delta$, mikä todistaakin väitteen. □

Huom. Ehto $a \ge 0$ ei ole oleellinen; voidaan olettaa, että $a \in \mathbb{R}$. Sen sijaan ominaisarvojen reaaliosan negatiivisuus on tärkeätä. Että $\dot{x} = Ax$ on stabiili, ei esimerkiksi riitä takaamaan systeemin (2.16) stabiilisuutta.

Esimerkki. Osoitetaan että ns. van der Polin skalaariyhtälön $\ddot{u} + e(u^2-1)\dot{u} + u = 0$ ratkaisu 0 on asymptoottisesti stabiili, kun parametrille e pätee $e<0$.

Vastaava 1. kl. systeemi on

$$\dot{x} = Ax + g(x), \text{ jossa } x = (x_1, x_2) = (u, \dot{u}),\ A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & e \end{bmatrix} \text{ ja } g(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ -e x_1^2 x_2 \end{bmatrix}.$$

Funktio g on peräti jatkuvasti derivoituva, ja

$$\|g(x)\| = |e|\, x_1^2 |x_2| \le |e|\, \|x\|^3 \Rightarrow g(x) = x^T O(x).$$

Systeemi on siis muotoa (2.15) ja siten myös muotoa (2.16). Erityisesti ehto (2.18) täyttyy.

Matriisin A ominaisarvot ovat $\lambda = \frac{1}{2}\left(e \pm \sqrt{e^2-4}\right)$, joiden niiden reaaliosat ovat negatiiviset, jos $e<0$. Lauseen 2.3 mukaan $x(t) \equiv \bar{0}$ on asymptoottisesti stabiili.

Tarkastellaan vielä systeemiä

$$\dot{x} = (A + B(t))x + f(t,x), \qquad (2.25)$$

jossa A on vakiomatriisi.

Lause 2.4. Toteuttakoot A ja $f(t,x)$ lauseen 2.3 ehdot ja $B(t)$ lauseessa 2.2 sille asetetut ehdot. Tällöin systeemin (2.25) nollaratkaisu $\bar{0}$ on asymptoottisesti stabiili lineaarisessa systeemissä.

Tod. Kts. Ohje. Analyysi lauseiden 2.2 ja 2.3 todistuksia. Erot vain oleellisia muutoksia. □

III. Autonomiset systeemit

III.1 Ljapunovin funktio ja hänen menetelmänsä

Tässä luvussa palataan luvun II harharetken jälkeen takaisin autonomisiin systeemeihin ja tutkitaan niiden tasapainoratkaisujen, mutta myös muidenkin ratkaisujen stabiilisuus-ominaisuuksia. Oleellista on edelleenkin, että ominaisuudet pyritään päättelemään ratkaisematta systeemiä eksplisiittisesti. Tehtävään otetaan nyt linearisoinnin sijaan tai ohella hyödynnetään eräänlaista testifunktiota, ns. Ljapunovin funktiota.

Tämä hänen menetelmänsä tarjoaa kriteereitä stabiilisuudelle ja asymptoottiselle stabiilisuudelle, mutta myös epästabiilisuudelle — ja aivan lineaarinen approksimointi ei pysty — sen avulla voidaan tutkia myös epävakioisia ratkaisuja, so. estimoida ns. stabiilisuuden aluetta, jossa alkavat ratkaisut ovat stabiileja kaikki. Koska lineaarisen systeemin ominaisuudet ovat aina globaaleja, lineaarisointi ei voi tässä suhteessa erotella ratkaisuja (ja epälineaarisessa tapauksessa ne eivät ole samaa laatua).

Mainittakoon että Lyapunovin menetelmä voidaan kyllä yleistää jonkin verran epäautonomisiin systeemeihin (Cesari 1971, Willems 1970).

Olkoon $y_0 \in D'$ autonomisen systeemin $\dot{y} = g(y)$, analogisesti systeemiin (1.1), kriittinen piste. Määrittelevä funktio $g : D' \to \mathbb{R}^n$ lokaalisti Lipschitz, ja siis $g(y_0) = \bar{0}$. Kriittinen piste y_0 siirtyy origoon yksinkertaisella muunnoksella (siirrolla)

$$x(t) = y(t) - y_0, \qquad (3.1)$$

sillä tällöin

$$\dot{x}(t) = \dot{y}(t) = g(y(t)) = g(x(t) + y_0) = f(x(t)),$$

ja systeemin $\dot{x} = f(x)$ määrittelevä funktio $f : D \to \mathbb{R}^n$, $D = D' - y_0$, on luonnollisesti lokaalisti Lipschitz. Lisäksi

$$f(\bar{0}) = g(y_0) = \bar{0}.$$

ja $\| x(t) - \bar{0} \| = \| y(t) - y_0 \|$. Siis $\bar{0}$ on systeemin $\dot{x} = f(x)$ kriittinen piste ja sen laatu on sama kuin kriittisen pisteen y_0 laatu systeemissä $\dot{y} = g(y)$. Siten voidaan rajoittua siihen, että tarkasteltava kriittinen piste on origo; kaikki teoreettiset tulokset kirjoitetaan siltä kannalta.

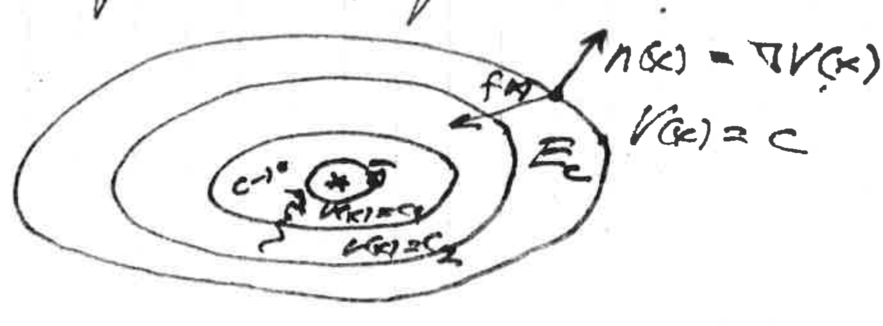
Tarkastellaan tehtävää osoittaa systeemin (1.1) kriittinen piste $\bar{0}$ stabiiliksi. Myötäillään lausetta 1.1; se antaa kriteerin positiivisesti invariantille joukoille. Pyritään löydetään ei-negatiivinen, jatkuvasti derivoituva muuttujan $x \in \mathbb{R}^n$ reaaliarvoinen funktio V, jolla $V(0)=0$ ja taso-arvokäyrät $V(x)=c>0$ ovat aina jokaisen arvon $c>0$ osalta sulkeutuvia ja sisäkkäisiä järjestyksessä, jonka parametrin c suuruus osoittaa: kun $0<c_1<c_2$, niin käyrä $V(x)=c_1$ jää käyrän $V(x)=c_2$ rajoittamaan alueeseen eli sen sisään. Näin käyrien rajoittamat alueet $E_c = \{x \in \mathbb{R}^n \mid V(x)<c\}$ muodostavat origon 0 ympäristöille kannan. Lisäksi pyritään siihen, että systeemin virtaus vie käyrältä $V(x)=c$ sisäänpäin. Käyrän ulkonormaali on gradienttivektori

$$\nabla V(x) = \left(\frac{\partial V}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial V}{\partial x_n}\right).$$

Jos

$$\nabla V(x) \cdot f(x) < 0 \qquad (3.2)$$

reunalla eli käyrällä $V(x)=c$, niin sisäpuoli E_c on lauseen 4.1 nojalla positiivisesti invariantti. Jos sulkeuma $\overline{E}_c = \{V(x) \le c\}$ on vielä kompakti, voidaan käyttää Poistumislausetta: jos $x \in E_c$, niin $\gamma^+(x) \subset E_c$ ja $t^+(x)=\infty$. Koska joukoista E_c, $c>0$, löytyy "kuinka pieniä origon ympäristöjä tahansa", voidaan vetää johtopäätös: tasapainoratkaisu 0 on stabiili.



Itse asiassa tulee riittämään, että ehdossa (3.2) pätee $\leq$.

<u>Määritelmä 3.1.</u> Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ origon sisältävä alue. Funktio $V : \Omega \to \mathbb{R}$ on <u>positiivisesti definiitti</u> <u>alueessa</u> Ω, jos $V(x) > 0$ kaikilla $x \in \Omega \setminus \{\bar{0}\}$ ja $V(\bar{0}) = 0$. Se on <u>positiivisesti semidefiniitti</u>, jos $V(x) \geq 0$ kaikilla $x \in \Omega \setminus \{\bar{0}\}$ ja $V(\bar{0}) = 0$. Vastaavasti $V : \Omega \to \mathbb{R}$ on <u>negatiivisesti definiitti tai semidefiniitti</u>, jos $-V : \Omega \to \mathbb{R}$ on sitä positiivisesti.

Puhutaan vain <u>definiittisyydestä</u>, jos V on sitä positiivisesti tai negatiivisesti. Vastaavasti <u>semidefiniittisyyden</u> kanssa.

<u>Esimerkki 3.1.</u> Olkoon $B = (b_{ij})$ symmetrinen reaalimatriisi, ts. $b_{ij} \in \mathbb{R}$ ja $B^T = B$ (transpoosi). Se määrittelee $\mathbb{R}^n$:ssä neliömuodon

$$V(x) = x^T B x = \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} x_i x_j .$$

Tämä on tunnetusti positiivisesti definiitti, koko $\mathbb{R}^n$:ssä, jos ja vain jos B:n ominaisarvot ovat positiiviset, positiivisesti semidefiniitti jos ja vain jos ominaisarvot ovat ei-negatiiviset.

Sen sijaan epäsymmetrisen matriisin tapauksessa ominaisarvot eivät suoraan kerro vastaavan neliömuodon definiittisyyttä.

Systeemin (1.1), $\dot{x}=f(x)$, määrittelee funktio $f: D \to \mathbb{R}^n$ (joka on lokaalisti Lipschitz).
Olkoon $\Omega \subset D$ alue ja $V:\Omega \to \mathbb{R}$ jatkuvasti derivoituva. Päteköön $0 \in \Omega$.

Määritelmä 3.2. Funktion V ja systeemiin (1.1) liittyvä funktio $\dot{V}(x):\Omega \to \mathbb{R}$ on

$$\dot{V}(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_k}(x) f_k(x) = \nabla V(x) \cdot f(x). \quad (3.3)$$

Lisäksi, jos $x(t)$ on alueessa Ω kulkeva (1.1):n ratkaisu, niin siihen liittyen merkitään

$$\dot{V}(t) = \frac{d}{dt}\left(V(x(t))\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_k} \dot{x}_k = \dot{V}(x(t)). \quad (3.4)$$

Vielä merkitään

$$N = \{ x \in \Omega \mid \dot{V}(x) = 0 \}. \quad (3.5)$$

Lause 3.1. Olkoon $V:\Omega \to \mathbb{R}$ jatkuvasti derivoituva ja $\dot{V}(x)$ negatiivisesti semidefiniitti Ω:ssa. Olkoon $K \subset \Omega$ kompakti, $x \in K$, $x(t) = t \cdot x$ siitä alkava (1.1):n ratkaisu, $\gamma^+(x)$ rata ja $\omega(x)$ tämän rajajoukko. Oletetaan että $\gamma^+(x) \subset K$. Tällöin

(a) $t^+(x) = \infty$, $x(t) \to \omega(x) \subset K$ kun $t \to \infty$. Erityisesti $\omega(x)$ on epätyhjä joukko.

(b) rajajoukko $\omega(x)$ on joukon $N \cap K$ invariantti osajoukko.

Tod. (a) Poistumislauseen nojalla $t^+(x) = \infty$. Loppu seuraa suoraan lauseen 1.4 kohdista (b), (e) ja (g).

(b) Koska $\dot V(t) = \frac{d}{dt} V(x(t)) \le 0$ kaikilla $t \ge 0$, funktio $V(x(t))$ on vähenevä. Toisaalta se on kompaktissa joukossa K alhaalta rajoitettu. Siten on olemassa

$$c = \lim_{t\to\infty} V(x(t)) \in \mathbb{R}.$$

Olkoon $y \in \omega(x)$. Lauseen 1.4 kohdan (a) nojalla löytyy sellainen aikajono (t_k), että $t_k \to \infty$ ja $x(t_k) = t_k \cdot x \to y$. Siten $\lim_{k\to\infty} V(x(t_k)) = c$, ja V:n jatkuvuuden nojalla $V(y) = c$. Siten $V(y) = c$ kaikilla $y \in \omega(x)$.

Lauseen 1.4 kohdan (c) nojalla $\omega(x)$ on invariantti, joten $y(t) = t \cdot y \in \omega(x)$ kaikilla $t \in \mathbb{R}$, kun $y \in \omega(x)$. Siten $V(y(t)) = c$ kaikilla t ja siten $\dot V(y(t)) = \frac{d}{dt} V(y(t)) = 0$. Erityisesti $\dot V(y) = \dot V(y(0)) = 0$, joten $y \in N$.
Siten $\omega(x) \subset N \cap K$ ja on tämän invariantti osajoukko.
Huom. Lauseen 3.1 tilanteessa $\omega(x)$ sisältyy pinnan käyrään $V_c = \{V(x) = c\}$. □

Lemma 3.1. Olkoon funktio $V : \Omega \to \mathbb{R}$ jatkuva ja positiivisesti definiitti origon sisältävässä alueessa $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, erityisesti $V(\bar 0) = 0$. Olkoon $r > 0$ sellainen, että $\bar B(\bar 0, r) \subset \Omega$, ja olkoon $\varepsilon > 0$ mielivaltainen. Tällöin löytyy sellainen $c_\varepsilon > 0$, että kaikille pisteille $x \in \bar B(\bar 0, r)$, joilla $0 \le V(x) < c_\varepsilon$, pätee

$$x \in B(\bar 0, \varepsilon) \text{ eli } \|x\| < \varepsilon.$$

Olkoon lisäksi $x : [t_0, \infty[\to \bar B(\bar 0, r)$ sellainen jatkuva funktio, että $\lim_{t\to\infty} V(x(t)) = 0$. Tällöin

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \bar 0.$$

Tod. Harj. tehtävä. Joukko $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \varepsilon \le \|x\| \le r\}$ on kompakti. □

Lause 3.2 (Lyapunovin teoreema).

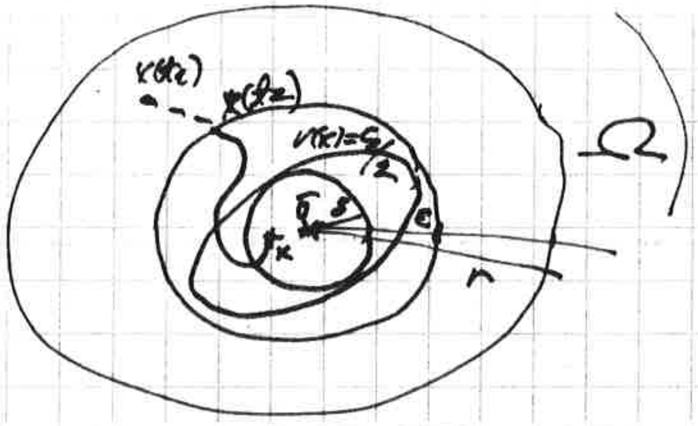
Olkoon $\bar{0}$ autonomisen systeemin (1-1) kriittinen piste: $f(\bar{0}) = \bar{0}$. Olkoon funktio $V : \Omega \to \mathbb{R}$ jatkuvasti derivoituva ja positiivisesti definiitti origon sisältävässä alueessa $\Omega \subset D$. Olkoon systeemiin (1-1) liittyvä funktio $\dot{V}(x)$ negatiivisesti semidefiniitti alueessa Ω.

(a) Tällöin tasapainotila $\bar{0}$ on stabiili systeemissä (1-1).

(b) Jos löytyy sellainen $r > 0$, että $\bar{B}(\bar{0}, r) \subset \Omega$ ja joukon $N \cap \bar{B}(\bar{0}, r)$ aidosti invariantti osajoukko on $\{\bar{0}\}$, niin tasapainotila $\bar{0}$ on asymptoottisesti stabiili systeemissä (1-1). Erityisesti näin on, jos funktio $\dot{V}(x)$ on peräti negatiivisesti definiitti Ω:ssa.

Tod. (a) Lemmaa 3.1 ajatellen valitaan sellainen $r > 0$ että $\bar{B}(\bar{0}, r) \subset \Omega$, "testiarvo" $0 < \varepsilon \le r/2$ ja sitä vastaava $C_\varepsilon > 0$ kuten lemmassa. Valitaan vielä sellainen $0 < \delta_\varepsilon \le \varepsilon$ että $V(x) < C_\varepsilon/2$ kun $x \in B(\bar{0}, \delta)$, mikä on V:n jatkuvuuden ja ehdon $V(\bar{0}) = 0$ nojalla mahdollista.

Olkoon $x \in B(\bar{0}, \delta_\varepsilon)$ ja $x(t) = t \cdot x$ vastaava systeemin (1-1) ratkaisu. Oletetaan että jollakin $t > 0$ pätee $x(t) \notin B(\bar{0}, \varepsilon)$. Jatkuvuuden nojalla löytyy sellainen $t_1 > 0$, että $x(t_1) \notin B(\bar{0}, \varepsilon)$ ja $x(t) \in B(\bar{0}, r)$ kaikilla $0 \le t \le t_1$. Lemman 3.1 nojalla $V(x(t_1)) \ge C_\varepsilon$.
Sitten jatkuvuuden nojalla löytyy sellainen $0 \le t_2 \le t_1$, että $V(x(t_2)) = C_\varepsilon$ ja sitä-
~~[illegible]~~ ennen $x(t) \in B(\bar{0}, \varepsilon)$ kaikilla $0 \le t < t_2$.



Väliarvolauseen nojalla löytyy reaaliluku $0<\xi<t_2$ siten että $(x(0)=x\in B(\bar 0,\delta_\varepsilon))$

$$\dot V(x(\xi))t_2 = \dot V(x(\xi))(t_2-0) = V(x(t_2))-V(x(0)) \ge c_\varepsilon - c_{\varepsilon/2} > 0,$$

joten $\dot V(x(\xi))>0$, mikä on ristiriidassa sen kanssa että $x(\xi)\in B(\bar 0,r)\subset\Omega$. Siten $x(t)\in B(\bar 0,\varepsilon)$ kaikilla $t\in I(x)$, $t\ge 0$.

Voidaan vetää seuraavat johtopäätökset:

(1) Koska $\bar B(\bar 0,r)\subset\Omega$ on kompakti ja $\gamma^+(x)\subset\bar B(\bar 0,r)$ jatkamislauseen nojalla $t^+(x)=\infty$ kaikilla $x\in B(\bar 0,\delta_\varepsilon)$.

(2) $x(t)\in B(\bar 0,\varepsilon)$ kaikilla $t\ge 0$ ja $x\in B(\bar 0,\delta_\varepsilon)$.

Koska $\varepsilon>0$ voidaan valita kuinka pieneksi tahansa, tasapainotila $\bar 0$ on kohtien (1-2) nojalla stabiili.

(b) Olkoon $r>0$ kuten oletetaan; se kelpaa myös kohdan (a) todistukseen $r:=$ [illegible]. Olkoon $\delta_\varepsilon>0$ kuten kohdassa (a) ja $x\in B(\bar 0,\delta_\varepsilon)$. Tällöin, kuten nähtiin, $\gamma^+(x)\subset\bar B(\bar 0,r)$.

Lauseen 3.1 kohdan (b) ja tämän lauseen oletusten nojalla $\omega(x)=\{\bar 0\}$. Siispä lauseen 3.1 kohdan (a) nojalla $x(t)\to\omega(x)=\{\bar 0\}$. Siten $\bar 0$ on asymptoottisesti stabiili.

Jos $\dot V(x)$ on vielä negatiivisesti definiitti, niin $N=\{\bar 0\}$, ja asia on edellä esitetyn nojalla selvä. □

Huom. Lauseen 3.2 viimeinen väite, "jos $\dot V(x)$ on peräti negatiivisesti definiitti, niin $\bar{0}$:n stabiilisuus on asymptoottista", voidaan todistaa suoraamminkin, ilman Lausetta 3.1, Lemman 3.1 (oppikirjassa) ja Lauseen 3.2 alkuosan (a) avulla.

Määritelmä 3.3. Lauseen 3.2 funktiota $V:\Omega \to \mathbb{R}$ kutsutaan autonomisen systeemin (1.1) tasapainotilaan $\bar{0}$ liittyväksi heikoksi Lyapunovin funktioksi. Jos $\dot V(x)$ on peräti negatiivisesti definiitti, Lyapunovin funktioon V liitetään määre vahva.

Esimerkki 3.2. Etsitään parille

$$\begin{cases} \dot x = -x - 2y^2 \\ \dot y = xy - y^3 \end{cases} \qquad (3.7)$$

tasapainotilaansa $\bar{0}$ liittyvä Lyapunovin funktio. Kokeillaan muotoa $V(x,y) = x^2 + ay^2$, jossa parametri $a>0$ jää määrättäväksi. Tällöin (3.3):n nojalla

$$\dot V(x,y) = 2x(-x-2y^2) + 2ay(xy-y^3) = -2x^2 - 4xy^2 + 2axy^2 - 2ay^4.$$

Valitaan $a=2$, jolloin $\dot V(x,y) = -2x^2 - 4y^4$ on negatiivisesti definiitti alueessa $\Omega = \mathbb{R}^2 \ni 0$. Itse $V(x,y) = x^2 + 2y^2$ on positiivisesti definiitti $\mathbb{R}^2$:ssa. Siis kaikkiaan se on vahva Lyapunovin funktio $\mathbb{R}^2$:ssa. Lauseen 3.2 nojalla $\bar{0}$ on asymptoottisesti stabiili.

Pätee enemmänkin: Alueet $E_c = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid V(x,y) < c\}$ ovat Lauseen 1.1 nojalla

positiivisesti ikuvuotoleja, että (50)
joun reuna on taso-ouvakäyrä $V(x,y)=c$, ja
niillä pätee $\nabla V(x,y)\cdot f(x,y) = \dot V(x,y) < 0$.
Lisäksi joukko $E_c = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid V(x,y)\le c\}$
on kompakti.

Olkoon $z=(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Valitaan sellainen c että $V(x,y)<c$. Tällöin, koska $z\in E_c$, $\gamma^+(z)\subset E_c\subset\Omega$ ja lauseen 3.1 nojalla $t^+(z)=\infty$ ja $t\cdot z\to\omega(z)=\{\bar 0\}$ $(N=\{\bar 0\})$: kaikki ratkaisut suppenevat origoon. Sanotaan että se on globaalisti asymptoottisesti stabiili.

Esimerkki 3.2. Van der Pol'in yhtälöllä $\ddot u+e(u^2-1)\dot u+u=0$ on vakioratkaisu 0. Tutkitaan sen stabiilisuutta. Yhtälö palautuu standardisijoituksella $x(t)=u(t)$ ja $y(t)=\dot u(t)$ 1.-kl. autonomiseksi systeemiksi

$$\begin{cases}\dot x = y\\ \dot y = -x+ey(1-x^2),\end{cases}\tag{3.8}$$

ja yhtälön ratkaisun $u(t)\equiv 0$ stabiilisuudella tarkoitetaan vastaavan ratkaisun $x(t)\equiv 0$, $y(t)=\dot u(t)\equiv 0$, eli vakioratkaisun $\bar 0=(0,0)$ stabiilisuutta systeemissä. Tutkitaan tätä Lyapunovin funktion avulla. Yksinkertaisesti, olkoon $V(x,y)=x^2+y^2$, joka positiivisesti definiitti alueessa $\Omega=\mathbb{R}^2\ (=D)$ ja luonnollisesti jatkuvasti derivoituva. Lisäksi
$$\dot V(x,y)=2xy+2y(-x+ey(1-x^2)) = 2e(1-x^2)y^2,$$

Täten jos $e<0$ (myös kun $e=0$), (51)

niin $\dot V(x,y) \le 0$ origon sisältävässä alueessa

$\Omega = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid |x|<1\}$.

V on siis heikko Lyapunovin funktio alueessa Ω, ja lauseen 3.2 nojalla $\bar 0$ on stabiili, kun $e<0$.

Lisäksi $N = \{(x,0) \mid |x|<1\}$ (määritelmä (3.7)) ja $\bar B = \bar B(\bar 0, \frac12) \subset \Omega$. Siis $N\cap \bar B(\bar 0,\frac12) = \{(x,0) \mid |x|<\frac12\}$.

Osoitetaan että tämän ainoa invariantti osajoukko on $\{\bar 0\}$: Olkoon $z=(x,0)\in N\cap\bar B$ ja $t\cdot z = (x(t),y(t))$ sen kautta kulkeva systeemin ratkaisu, joka kulkee joukossa $N\cap\bar B$ (invarianssi!). Tällöin

$y(t)\equiv 0 \Rightarrow \dot x(t)\equiv 0 \Rightarrow x(t)=c \Rightarrow \dot y(t)=0=-c \Rightarrow \begin{cases} x(t)\equiv 0 \\ y(t)\equiv 0\end{cases} \Rightarrow z=\bar 0$

Siten ainoa $N\cap\bar B$:n invariantti osajoukko on $\{\bar 0\}$.

Lauseen 3.2 kohdan (b) nojalla $\bar 0$ on peräti asymptoottisesti stabiili, kun $e<0$.

Huom. $V(x,y)=x^2+y^2$ ei ole suinkaan ainoa mahdollinen toimiva Lyapunovin funktio tässä tapauksessa.

Lyapunovin funktion löytäminen on kaikkea muuta kuin itsestäänselvä asia (vaikka $\bar 0$ olisikin stabiili), eikä ole mitään yleispätevää ohjetta siihen. Tätä täytyy pitää luonteenomaisena piirteenä Lyapunovin menetelmälle.

Jotain osviittaa valintaan voi antaa fysiikka. Tarkastellaan kappaleen vapaata liikkumista voimakentässä, joka riippuu vain kappaleen paikasta ja nopeudesta (tämän tilamuuttujista). Tällöin Newtonin mekaniikan antama differentiaaliyhtälösysteemi, myös palautettuna

Lokaali definiittisyys analyyttisesti

Olk. $z=(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Symmetrisen matriisin

$$A=\begin{bmatrix} a & b \\ b & c\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^{2\times 2}$$

~~obi~~ sen määräämä neliömuoto z^TAz on positiivisesti/negatiivisesti definiitti jos ja vain jos sen ominaisarvot λ_1 ja λ_2 (jotka tunnetusti ovat reaaliset) ovat positiiviset/negatiiviset $\Leftrightarrow$

$$\lambda_1\lambda_2 = \det A = ac-b^2>0$$

ja $\lambda_1+\lambda_2 = \operatorname{trace} A = a+c>0$ / $a+c<0$

$$\Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{l}\det A = ac-b^2>0 \\ \text{ja}\quad a>0 \ / \ a<0.\end{array}} \qquad (\Rightarrow ac>0)$$

Palataan luvun 7 tehtävään 3. Siinä neliömuoto $V(z)=z^TAz$, $A=\begin{bmatrix} a & b \\ b & c\end{bmatrix}$, on pos. definiitti jos ja vain jos

(1) $ac-b^2>0$ ja (2) $a>0$.

Tehtävän perin tärkeä lemma: $V(z)=g(x,y)$ on lokaalisti eli jossain origon ympäristössä Ω neg. definiitti, jos $g(\bar 0)=g_x(\bar 0)=g_y(\bar 0)=0$ ja ja g:n Hessen matriisi origossa

$$H(\bar 0)=\begin{bmatrix} g_{xx}(\bar 0) & g_{xy}(\bar 0) \\ g_{xy}(\bar 0) & g_{yy}(\bar 0)\end{bmatrix} \quad (\text{symmetrinen}),$$

on negatiivisesti definiitti, mikä seuraa g:n Taylorin kehitelmästä.

$\Leftrightarrow$ (3) $\det H(\bar 0)>0$ ja (4) $g_{xx}(\bar 0)<0$.

Oletetaan että $a,b,c\in\mathbb{R}$ on [illegible] S [illegible] (ℓ - [illegible]). [illegible]

$V(z)=z^TAz$ on [illegible] Ljapunovin funktio $\Omega=\mathbb{R}^2$.

Todistetaan esimerkin 3-3 pointa uudella tavalla. Oletetaan että $e<0$, jolloin tasapainopiste $\bar{o}$ on siis asymptoottisesti stabiili. Etsitään tähän liittyvä neliömuotoa oleva vakava Lyapunovin funktio "analyyttisesti", mikä takaa toimivuuden jossain origon ympäristössä eli lokaalisti.

Dimensio $n=2$, parametrinen neliömuoto kuuluu

$V(z) = ax^2+2bxy+cy^2 = z^T A z$, jossa $z=(x,y)$ ja $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$, siis symmetrinen. Itse V on pos. definiitti $\Leftrightarrow$

(1) $\det A = ac-b^2>0$ ja (2) $a>0$.

Pariin (3.8) liittyvä V:n derivaatta kuuluu

$g(x,y) := \dot{V}(z) = (2ax+2by)y + (2bx+2cy)(-x+ey(1-x^2)) =$

$2axy+2by^2-2bx^2-2cxy+2bexy(1-x^2)+2ce(1-x^2)y^2 =$

$2(a-c)xy - 2bx^2+2by^2+2bexy+2cey^2-2bex^3y-2cex^2y^2$;

pätee siis $\underline{g(\bar{o})=0}$.

$g_x = 2(a-c)y-4bx+2bey-6bex^2y-4cexy^2$; pätee siis $\underline{g_x(\bar{o})=0}$.

$g_y = 2(a-c)x+4by+2bex+4cey-2bex^3-4cex^2y$; pätee siis $\underline{g_y(\bar{o})=0}$.

$g_{xx} = -4b-12bexy-4cey^2$

$g_{xy} = 2(a-c)+2be-6bex^2-8cexy$

$g_{yy} = 4b+4ce-4cex^2$,

jossa Hessen matriisi pisteessä $\bar{o}$:

$H(\bar{o}) = \begin{bmatrix} -4b & 2(a-c)+2be \\ 2(a-c)+2be & 4b+4ce \end{bmatrix}$, (symmetrinen). Se on

neg. definiitti $\Leftrightarrow$ (3) $\det H(\bar{o}) = -16b^2-16bce-4(a-c+be)^2>0$

ja (4) $-4b<0$. Kohdat (1–4) toteutuvat esimerkiksi valinta

$\underline{b=1 \text{ ja } a=c>\max\left\{1, \frac{e^2+4}{-4e}\right\} = \frac{e^2+4}{-4e} \ (\geq 2)}$.

Nimittäin kun $b=1$ ja $a=c$, (3) saa muodon $-(e^2+4)\underbrace{-4e}_{>0}c>0$.

kerfalulaan yllä, on autonominen. Tällöin myös kappaleen kokonaisenergia 1.kl. systeemissä riippuu vain funktionaalisuudesta $x(t)$, ei eksplisiittisesti ajasta t. Siis $E = E(x)$. Liike pyrkii pienemmän vain menettämään energiaansa, jos ei saa sitä ulkopuolelta lisää. Silloin $\frac{d}{dt}(E(x(t))) = \nabla E \cdot \dot{x}(t) \leq 0$, mikä vihjaa että kokonaisenergia $E(x)$ olisi hyvä ehdokas Lyapunovin funktioksi. Asiassa on eräs ongelma: Tarkastellaan systeemin tasapainotilaa, joka voidaan olettaa olevan origo $\bar{0}$, sillä siihen se voidaan aina siirtää. Ei ole itsestään selvää että energia olisi positiivisesti definiitti jossain origon ympäristössä, mitä lause 3.2 edellyttää.

Tässä kohtaa pitää viitata Lyapunovin menetelmän alkujuuriin. Ne voi jäljittää aina vuoden 1800 paikkeille, Lagrangen analyyttiseen mekaniikkaan. Hän formuloi, että tasapainotila konservatiivisessa mekaanisessa systeemissä on stabiili tasan silloin, kun siinä tilassa potentiaalienergia on minimissään. Dirichlet osoitti perustelun myöhemmin oikeaksi.

<u>Esimerkki 3.4.</u> Kappale massaltaan m liikkukoon pitkin lukusuoraa. Vaikuttakoon siihen voima $f(u)$, joka riippuu vain paikasta $u \in \mathbb{R}$ (ei siis ajasta t eksplisiittisesti). Newtonin 2. lain nojalla liikkeelle saadaan 2.kl. yhtälö

$m\ddot{u} = f(u)$. Olkoon 0 sen tasapainotila: $f(0) = 0$. Sijoituksella $z = (x, y) = (u, \dot{u})$ saadaan vastaava autonominen 1.kl. systeemi (pari)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ m\dot{y} &= f(x), \end{aligned} \qquad (3.9)$$

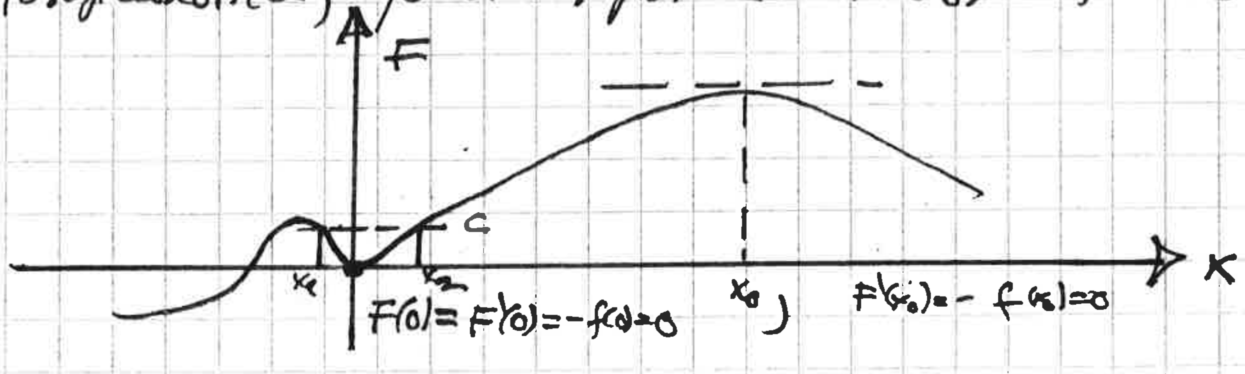
jolla on $\bar{0}$ tasapainotilana.

Voima (ja koko liikesysteemi) on konservatiivinen, sillä sillä on potentiaali

$$F(x) = -\int_0^x f(z)\,dz, \quad \text{jolloin } F'(x) = -f(x).$$

Huom. Korkeammassa dimensiossa skalaaripotentiaalin olemassaolo ei ole itsestään selvää, kuten Vektorianalyysissä.

Oletetaan että tasapainotilassa $\bar{0}$ potentiaali F on (aidosti) minimissään, yksinkertaisesti, jolloin 0:n ympäristössä $F'(x) = -f(x) > 0$ oikealla ja $F'(x) = -f(x) < 0$ vasemmalla (tässä ympäristössä f vetää origoon päin). Lisäksi $F(0) = 0$. Olkoon $x_0 = a_0$ toinen tasapainotila, jolloin myös pätee $F'(x_0) = -f(x_0) = 0$.



Lagrange: 0 stabiili tasapainotila, x_0 epästabiili tasapainotila.

Systeemin liike-energia on $T = \frac{1}{2} m (\dot{u})^2 = \frac{1}{2} m y^2$ ja kokonaisenergiaksi saadaan potentiaali + liike-energia eli

$$V(z) = V(x,y) = F(x) + \frac{1}{2} m y^2,$$

joka on selvästi positiivisesti definiitti jossain sopivassa $\bar{0}$ ympäristössä (mutta ei x_0:n ympäristössä, koska tämä siirrettäisiin origoon ja F skaalattaisiin). Pienenä viitteenä analyysiin mainittakoon: systeemin Hamiltoni on $H = \frac{1}{m} V$.

Lisäksi systeemin liikkeen

$$\dot{V}(x,y) = \frac{\partial V}{\partial x} y + \frac{\partial V}{\partial y} f(x) = F'(x) y + m y \cdot \frac{f(x)}{m} = -f(x) y + y f(x) = 0,$$

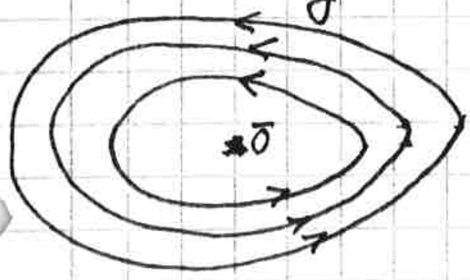
joten V on kelpo Lyapunovin funktio jossain origon ympäristössä. Lauseen 3.2 nojalla tasapainotila $\bar{0}$ on stabiili.

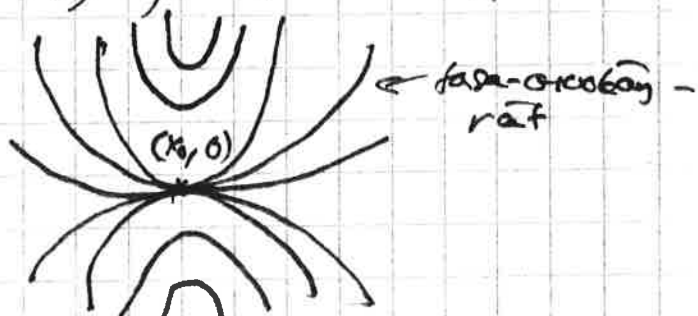
Olkoon $z(t)=(x(t),y(t))$ systeemin ratkaisu. Tällöin siis $\dot{V}(t) = \frac{d}{dt}\big(V(z(t))\big) = \dot{V}(z(t)) = 0$ kaikilla t, joten $V(z(t)) = c$ jollakin vakiolla c: ratkaisu pysyy energiafunktion $V(z)$ tasa-arvokäyrällä. Näin käy aina kun energia ei systeemissä muutu.

Vaikka $\bar{0}$ on stabiili, se ei ole asymptoottisesti stabiili. Itse asiassa fysikaalisen intuition mukaan, että $\bar{0}$ voi olla stabiili asymptoottisesti vain kun kappaleen kokonaisenergia ajan myötä häviää, vaikkapa kitkan vaikutuksesta.

Havaitaan että, tarpeeksi pienellä $c>0$ löytyy sellaiset $x_1<0$ ja $x_2>0$, että $F(x_1)=F(x_2)=c$ (kuva), jolloin siis tasa-arvokäyräksi saadaan suljettu, origoa ympäri kulkeva

$$y = \pm \frac{2}{m}\big(c-F(x)\big)^{1/2}, \quad x_1 \le x \le x_2 .$$





Esimerkki 3.5. Etsitään Lyapunovin funktio origolle

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\frac{1}{m}\big(\lambda x + f(x,y)y\big) \end{cases} \quad (3.10) \qquad D \subset \mathbb{R}^2,$$

jossa $m>0$, $\lambda>0$ ovat parametreja, funktio f on lokaalisti Lipschitz ja $f(x,y) \ge 0$ jossain origon ympäristössä $\Omega \subset D$. Systeemi vastaa skalaariyhtälöä

$$m\ddot{u} + f(u,\dot{u})\dot{u} + \lambda u = 0,$$

jota mallintaa epälineaarisella vaimennustermillä

Tarkastellaan massa-jousi-systeemiä.

Kokeillaan positiivisesti definiittiä funktiota

$$V(x,y) = \tfrac{1}{2}\left(\lambda x^2 + m y^2\right),$$

jonka tulkinta kyseisessä fysikaalisessa systeemissä on kokonaisenergia = potentiaalienergia + liike-energia =

$$\int_0^x \lambda s\,ds + \tfrac{1}{2} m (\dot u)^2 \quad (\text{jousivoima} = \lambda x).$$

Pätee $\dot V(x,y) = \lambda x y - y(\lambda x + f(x,y)y) = -f(x,y)y^2$, joka on ≤ 0 alueessa Ω. Siten V on heikko Lyapunovin funktio kyseisessä alueessa. Lauseen 3.2 nojalla tasapainotila $\bar 0$ on stabiili.

Jos oletetaan $f(x,y) > 0$ Ω:ssa, niin lauseen 3.2 nojalla stabiilisuus on asymptoottista, sillä silloin $N \cap \bar B(\bar 0, r)$:n ainoa invariantti osajoukko on $\{\bar 0\}$, mikä nähdään kuten esimerkissä 3.3.

Esimerkki 3.6. Liénardin yhtälö on

$$\ddot u + f(u)\dot u + g(u) = 0.$$

Oletetaan funktiot f ja g jatkuviksi, itse asiassa on parempi olettaa että g on lokaalisti Lipschitz. Erääksi yhtäpitäväksi 1-kl. pariksi saadaan

$$\begin{cases} \dot x = y - F(x) \\ \dot y = -g(x), \end{cases} \qquad (3.11)$$

jossa $F(x) = \int_0^x f(s)\,ds$. Lisäksi merkitään $G(x) = \int_0^x g(s)\,ds$. Huomaa että parin (3.11) oikea puoli on lokaalisti Lipschitz jossain origon ympäristössä.

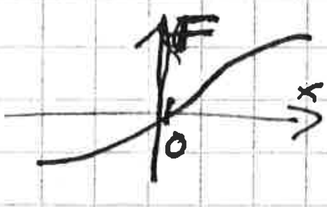
Harj. Osoita Liénardin yhtälön ja sen (3.11) yhtäpitävyys.
Ohje. Sijoitus ei ole se aivan tavallinen.

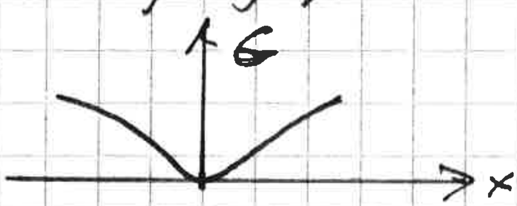
Oletetaan lisäksi että

(1) $f(x) > 0$ jossain nolla ympäristössä,

(2) $x\,g(x) > 0$ jossain nolla punkteeratussa ympäristössä, erityisesti $g(0) = 0$, joten $\bar{0}$ on systeemin tasapainotila.

Tällöin funktiot F ja G käyttäytyvät kuvion esittämällä tavalla:





Funktio $V(x,y) = G(x) + \frac{1}{2}y^2$

on jatkuvasti derivoituva ja selvästikin positiivisesti definiitti jossain $\bar{0}$:n ympäristössä. Lisäksi systeemin (3.11) liittyen

$$\mathring{V}(x,y) = g(x)\big(y - F(x)\big) - y\,g(x) = -g(x)F(x),$$

joka on negatiivisesti semidefiniitti jossain origon $\bar{0}$ ympäristössä ja 0 tasan silloin kun $x = 0$.

Lauseen 3.2 nojalla tasapainotila $\bar{0}$ on stabiili.
~~Se on lauseen kohdan (c) nojalla myös asymp-~~
toottisesti stabiili, sillä $N = \{(0,y) \mid y \cdots\}$
ja (3.11):stä saadaan $x(t) \equiv 0 \Rightarrow \dot{x}(t) \equiv 0$ ja $F(x(t)) \equiv 0 \Rightarrow y(t) \equiv 0$. Siten $N \cap \bar{B}(\bar{0},r)$:n ainoa invariantti osajoukko on $\{\bar{0}\}$, kunhan $r > 0$ (jokin sopiva valitaan).

Jos (1) ja (2) pätevät koko $\mathbb{R}$:ssä, ja $G(x) \to \infty$ kun $|x| \to \infty$, niin $\bar{0}$ on globaalisti asymptoottisesti stabiili. Nimittäin joukot $E_c = \{(x,y) \mid V(x,y) < c\}$ ovat pos. invariantteja (lauseen 3.2 todistus) ja sulkeumat $\bar{E}_c$ ovat kompakteja invariantteja, lause 3.1, N:n suurin $\{\bar{0}\}$.

III.2 Ljapunovin testi epästabiilisuudelle

Lause 3.3. Olkoon $\bar{0}$ systeemin (1.1) kiintopiste ja $\bar{B}(\bar{0},r) \subset \Omega$, $r>0$. Olkoon $W = W(x)$ sellainen kuulassa (sen ympäristössä) määritelty jatkuvasti derivoituva reaaliarvoinen funktio, että

(1) $W(\bar{0}) = 0$,

(2) sen systeemiin (1.1) liittyvä "derivaatta" kuten (3.3):ssa, $\dot{W}(x) = \nabla W(x) \cdot f(x)$, on positiivisesti definiitti $\bar{B}(\bar{0},r)$:ssä,

(3) jokaisesta origon ympäristöstä löytyy piste x jossa $W(x)>0$.

Tällöin systeemin (1.1) tasapainotila $\bar{0}$ on epästabiili.

Tod. Olkoon $0<\delta<r$ ja $x_\delta \in B(\bar{0},\delta)$ sellainen piste että $W(x_\delta)>0$, jollainen (3):n nojalla löytyy. Tällöin ensinnäkin (1):n nojalla $x_\delta \neq \bar{0}$. Olkoon $x(\delta;t) = t \circ x_\delta$ vastaava systeemin (1.1) ratkaisu. Riittää osoittaa että jollakin $t>0$ pätee $x(\delta;t) \notin \bar{B}(\bar{0},r)$.

VO: $x(\delta;t) \in \bar{B}(\bar{0},r)$ kaikilla $t \in \Delta(x_\delta)$, $t \geq 0$. Poistumislauseen nojalla $t^+(x_\delta) = \infty$, siis $[0,\infty[\subset \Delta(x_\delta)$. Jatkuvuuden ja ehdon (1) nojalla löytyy sellainen $\eta>0$, että $W(x) < W(x_\delta)/2$ kun $x \in B(\bar{0},\eta)$. Osoitetaan että

$$x(\delta;t) \notin B(\bar{0},\eta) \text{ kaikilla } t \geq 0, \qquad (*)$$

mikä luonnollisesti käy ihan samoin kuin Lauseen 3.2 todistuksessa: oletetaan että jollakin $t>0$ pätee $x(\delta;t) \in B(\bar{0},\eta)$. Tällöin [illegible]lauseen (tai Bolzanon) nojalla löytyy sellainen $t_1>0$, että

$$W(x(\delta;t_1)) = W(x_\delta)/2 \quad \text{ja} \quad x(\delta;t) \notin B(\bar{0},\eta) \text{ kaikilla } 0 \leq t < t_1.$$

Tällöin erityisesti $\dot{W}(x(\delta;t)) > 0$.

Väliarvolauseen nojalla löytyy sellainen $0 < \xi < t_1$, että

$\mathring{W}(x(\delta;\xi))t_1 = W(x(\delta;t_1)) - W(x_\delta) = -W(x_\delta)/2 < 0.$

Ristiriita osoittaa relaation (*) todeksi.

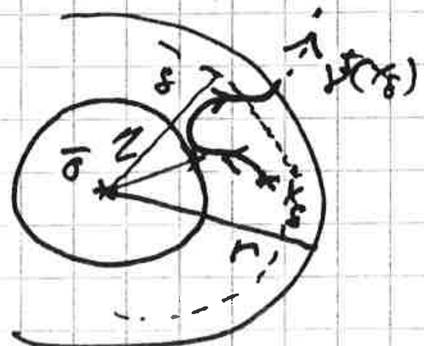
Vastaoletuksen ja (*):n nojalla $x(\delta;t) \in \overline{B}(\bar{0},r)\setminus B(\bar{0},\rho)$ kaikilla $t \geq 0$. Koska kyseinen joukko on kompakti, löytyy sellainen $m>0$ että

$$\mathring{W}(x(\delta;t)) \geq m \text{ kaikilla } t \geq 0.$$

Siten $W(x(\delta;t)) - W(x_\delta) = \int_0^t \mathring{W}(x(\delta;\tau))\,d\tau \geq \int_0^t m\,d\tau = mt,$

josta seuraa $W(x(\delta;t)) \to \infty$ kun $t \to \infty$. (**)

Koska $W(x)$ on jatkuvana rajoitettu kompaktissa kuulassa $\overline{B}(\bar{0},r)$, niin $x(\delta;t) \notin \overline{B}(\bar{0},r)$ jollain $t>0$ (**):n nojalla. Saatu ristiriita vastaoletuksen kanssa osoittaa, että x_δ:n kautta kulkeva rata poistuu kuulasta $\overline{B}(\bar{0},r)$. Siten tasapainotila $\bar{0}$ on epästabiili. □



Huom. Poistumisen tapahtuessa pallosta kuulasta $\overline{B}(\bar{0},r)$, jossa toteutuu lauseen ehdot,

ja pallossa origon ympäristössä on positiivisen [illegible] alkuarvoista. Itse asiassa, jos $\mathring{W}(x)>0$ tarvitaan (siitä voidaan arvioida $m>0$)), niin poistumisen nopeuttakin voidaan arvioida.

Funktio $W(x)$ voi olla origon ympäristössä aivan hyvin indefiniitti, saada sekä positiivisia että negatiivisia arvoja! Taso-ongelmassa tyypillisiä "Ljapunovin koefunktioita" ovat $W(x,y) = xy$ ja $W(x,y) = x^2 - y^2$.

Esimerkki 3.7. Osoitetaan että 2.6l. skalaariyhtälön $\ddot{u} + \dot{u}\sin u - u = 0$ nollaratkaisu 0 on epästabiili. Vastaava autonominen 1.6l. pari on

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = x - y\sin x, \end{cases} \qquad (3.12)$$

jolla on piste $\bar{0}$ tasapainotilana. Kokeilaan parin loittofunktioksi yritettä

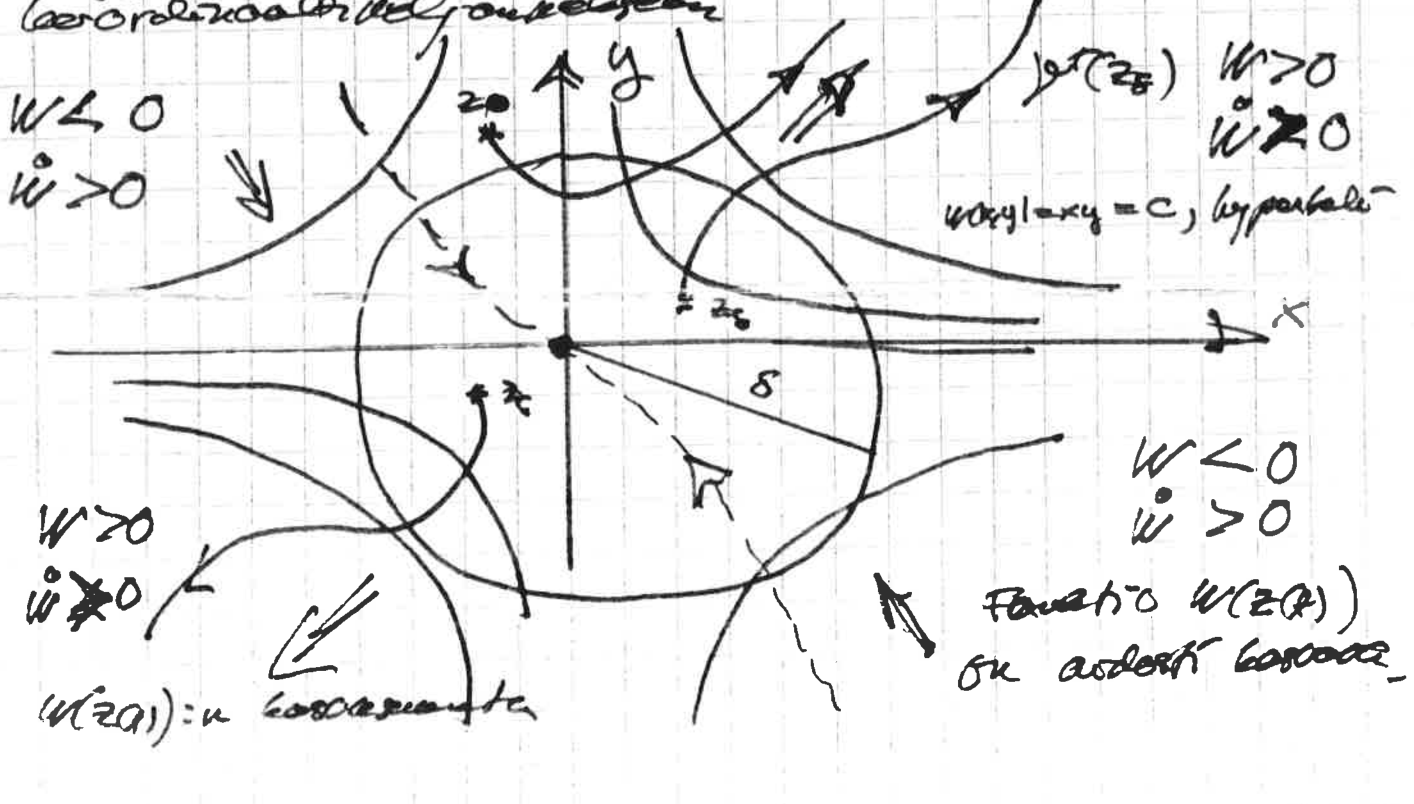
$$W(x,y) = xy.$$

Lauseen 3.3 ehdot (1) ja (3) selvästi toteutuvat. Lisäksi

$$\dot{W}(x,y) = \frac{\partial W}{\partial x} y + \frac{\partial W}{\partial y}(x - y\sin x) = y^2 + x(x - y\sin x) = x^2 + y^2 - xy\sin x.$$

On helposti nähtyä että $\dot{W}(x,y)$ on positiivisesti definiitti koko tasossa $\mathbb{R}^2$, joten ehto (2) toteutuu. Lauseen 3.3 nojalla tasapainotila $\bar{0}$, ja myös alkuperäisen 0, on epästabiili.

Erityisesti, koska $r > 0$ voidaan nyt valita vapaasti, niin jokaiselle $z_\delta = (x_\delta, y_\delta)$, jolla $W(z_\delta) = x_\delta y_\delta > 0$, vastaava rata $\gamma^+(z_\delta)$ poistuu äärettömyyteen! (voi tapahtua myös ennen z_δ). Näin on koska z_δ kuuluu I:een tai III:een koordinaattineljännekseen.



Luvussa II osoitettiin, kuinka systeemin (1.1) liikeyhtälöt voidaan ottaa lähtökohdaksi tasapainotilan stabiilisuuden tutkimiseen. Tasapainotila siirretään tarvittaessa origoon ja saadaan yleistettyä lineaarista systeemi (2.17), $\dot{x} = Ax + g(x)$, jossa häiriö $g(x)$ toteuttaa vähäisyysehdon (2.18), joka tässä tekee ehdosta (2.15) yksikäsitteisesti määrätyn. Matriisi A on (1.1):n f:n derivaattamatriisi kyseisessä tasapainotilassa, joka on siirretty origoon. Origon stabiilisuus luetaan silloin liikeyhtälöstä $\dot{x} = Ax$, tarkemmin sanottuna matriisista A, kuten lauseessa 2-3 todettiin. Tämä tulos antaa vastauksen vain hyperbolisessa tapauksessa, mikä muodostaa autonomisten systeemien soveltamiselle olennaisen seuraavasta Poincarén ja Perronin lauseesta (todistetaan seuraavassa luvussa).

Lause 3-4. Olkoon autonominen systeemi muotoa (2.17), $\dot{x} = Ax + g(x)$, jossa $g(x)$ on lokaalisti Lipschitz ja toteuttaa ehdon (2.18) $\|g(x)\| \le \|x\| \|O(x)\|$. Tällöin $\bar{0}$ on systeemin tasapainotila, ja tämä on asymptoottisesti stabiili, jos matriisin A ominaisarvojen reaaliosat ovat kaikki negatiivisia.

Jos yksikin niistä on positiivinen, tasapainotila $\bar{0}$ on epästabiili ~~kyseisessä~~ systeemissä.

Lauseen 3-4 käyttö on mekaanisempaa kuin varsinaisten Ljapunovin lauseiden 3.2–3, joissa pitää löytää funktio V tai W.

Esimerkki 3.8. Tarkastellaan 3-ulotteista systeemiä

$$\dot{x} = Ax + g(x), \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad g(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ (x_1+x_2)x_3 \end{bmatrix}, \qquad (3.13)$$

jossa $x=(x_1,x_2,x_3)$. Funktion g komponentit ovat polynomeina jatkuvasti derivoituvia: g on lokaalisti Lipschitz. Se toteuttaa myös ehdon (2.18), sillä

$$\|g(x)\| = |x_1+x_2||x_3| \le |x_1||x_3| + |x_2||x_3| \le 2\|x\|^2 = \|x\|\|O(x)\|.$$

Lasketaan matriisin $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ ominaisarvot:

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ -2 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-2)(1-\lambda)(1+\lambda) = 0 \iff$$

$\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = -1$; mukana on positiivista (siis reaaliosaltaan positiivista). Lauseen 3.4 nojalla tasapainotila $\bar{0}$ on epästabiili.

III.3 Asymptoottisen stabiilisuuden alue

Olkoon $\bar{0}$ autonomisen systeemin (1.1) tasapainotila, siis $f(\bar{0}) = \bar{0}$, joka on asymptoottisesti stabiili. Tutkitaan miten tämä heijastuu muihin systeemin ratkaisuihin.

Määritelmä 3.9. Olkoon systeemin (1.1) tasapainotila $\bar{0}$ asympt. stabiili. Olkoon $\Psi \subset O$ kaikkien niiden pisteiden $x \in O$ joukko, joille pätee

(1) $t^+(x) = \infty$, t.s. vastaava systeemin ratkaisu $x(t) = t \cdot x$ on olemassa kaikilla $t \ge 0$,

(2) ratkaisulla pätee $x(t) \to \bar{0}$ kun $t \to \infty$.

Joukkoa Ψ kutsutaan tasapainotilaan $\bar{0}$ liittyväksi asymptoottisen stabiilisuuden alueeksi (yhtä kuin $\bar{0}$:n attraktioalueeksi).

Huom. Kyseinen käsite voidaan määritellä myös epäautonomiselle systeemille, ja myös muille kuin nollaratkaisulle.

Lause 3.5. Joukko Ψ on epätyhjä, avoin ja polkuyhtenäinen.

Tod. Koska $\bar{0}$ on asymptoottisesti stabiili, löytyy sellainen $r>0$ että $B(\bar{0},r) \subset \Psi$. Kun $x,y \in \Psi$ ne yhdistävä polku löytyy kuulan $B(\bar{0},r)$ kautta.

Olkoon $x \in \Psi$. Tällöin löytyy sellainen $t_1 > 0$, että $x_1 = t_1 \cdot x \in B(\bar{0},r)$. Merkitään $\varepsilon = r - \|x_1\| > 0$. Lauseen 1.3, virtauksen ϕ jatkuvuuden, nojalla löytyy sellainen $\delta > 0$, että $(t_1, y) \in \Omega_\phi$ eli $t_1 \in \alpha(y)$ ja $y_1 = t_1 \cdot y \in B(x_1,\varepsilon) \subset B(\bar{0},r) \subset \Psi$ aina kun $y \in B(x,\delta)$. Koska $(t+t_1)\cdot y = t \cdot y_1 \to \bar{0}$ kun $t \to \infty$, $t^+(y) = \infty$ ja $t \cdot y \to \bar{0}$, ts. $y \in \Psi$. Siten $B(x,\delta) \subset \Psi$, ja siten Ψ on avoin joukko. □

Lause 3.6. Olkoon $\bar{0}$ asymptoottisesti stabiili tasapainotila systeemissä (1.1) ja $x \in \Psi$. Tällöin myös ratkaisu $x(t) = t \cdot x$ on asymptoottisesti stabiili. Siis jokainen joukosta Ψ alkava (tai sen kautta kulkeva, aikatranslaatio) ratkaisu on asymptoottisesti stabiili kyseisessä systeemissä.

Tod. Harj.- tehtävä. Ohje. Lause 3.5 ja sen todistuksen jatkuvuus. □

Esimerkki 3.9. Esimerkin 3.2 asymptoottisen stabiilisuuden alue on $\Psi = \mathbb{R}^2$. Samoin myös esimerkin 3.6, jos siinä esiintyvät ehdot (1) ja (2) toteutuvat koko $\mathbb{R}$:ssä. Siis näissä esimerkeissä kaikki ratkaisut ovat asymptoottisesti stabiileja!

Olkoon $V:\Omega\to\mathbb{R}$ systeemin (7.1) Ljapunovin funktio alueessa $\Omega\subset D$, vahva tai heikko. Palautetaan mieleen merkinnät

$$E_c = \{x\in D \mid V(x)<c\},\quad c\in\mathbb{R}, \tag{3.14}$$

siis tasa-arvokäyrän $V(x)=c$ rajoittama avoin joukko, ja $\overline{E}_c$, sen sulkeuma avaruudessa $\mathbb{R}^n$.

Lemma 3.2. Olkoon $\overline{E}_c\subset\Omega$ jollakin $c>0$. Tällöin joukko E_c on positiivisesti invariantti.

Tod. Seurataan lauseiden 3.2 ja 3.3 todistuksissa esitettyä tyyliä: Olkoon $x\in E_c$ ja vastaoletetaan että $t\cdot x\notin E_c$ jollakin $t>0$. Koska $\mathbb{R}^n$ on yhtenäinen, reunanylityslauseesta seuraa että löytyy pienin $t_1>0$ jolla $t_1\cdot x\in\partial_{\mathbb{R}^n}E_c$. Erityisesti $t\cdot x\in E_c$ kaikilla $0\le t<t_1$.

Reunan $\partial_{\mathbb{R}^n}E_c\subset\overline{E}_c\subset\Omega$ pisteissä y pätee $V(y)=c$, muut mahdollisuudet poistaa V:n jatkuvuus.

Väliarvolauseen nojalla löytyy sellainen $0<\xi<t_1$ että

$$\dot V(\xi\cdot x)t_1 = V(t_1\cdot x)-V(x) = c-V(x)>0,$$ joten $\dot V(\xi\cdot x)>0$, mikä on vastoin tietoa $\xi\cdot x\in E_c\subset\Omega$. □

Huom. 1. Jos systeemin ratkaisun oletetaan aina kulkevan D:ssä (mikä itse asiassa aina toteutuu), niin sulkeuma $\overline{E}$ voidaan korvata lemmassa sulkeumalla $cl_D E_c$.

Huom. 2. Muita positiivisesti invariantteja joukkoja löytyy esimerkiksi lauseen 1.1 avulla.

Lause 3.7. Olkoon V vahva tai heikko Ljapunovin funktio ja $\bar 0$ systeemin (7.1) tasapainotila. Olkoon $c>0$, joukko $\overline{E}_c$ kompakti ja $\overline{E}_c\subset\Omega$. Oletetaan että joukon $N\cap\overline{E}_c$ ainoa invariantti osajoukko on $\{\bar 0\}$. Tällöin tasapainotila $\bar 0$ on asymptoottisesti stabiili ja

$$E_c\subset\Psi. \tag{3.15}$$

Tod. Pelkkä stabiilisuus seuraa lauseesta 3.2. Koska $\overline{E}_c\subset\Omega$, joukko E_c on lemman 3.2 nojalla positiivisesti invariantti. Sovelletaan lausetta 3.1 kompaktiin joukkoon $K=\overline{E}_c\subset\Omega$. Olkoon $x\in E_c$. Tällöin $t^+(x)=\infty$ ja $\omega(x)=\{\bar 0\}$

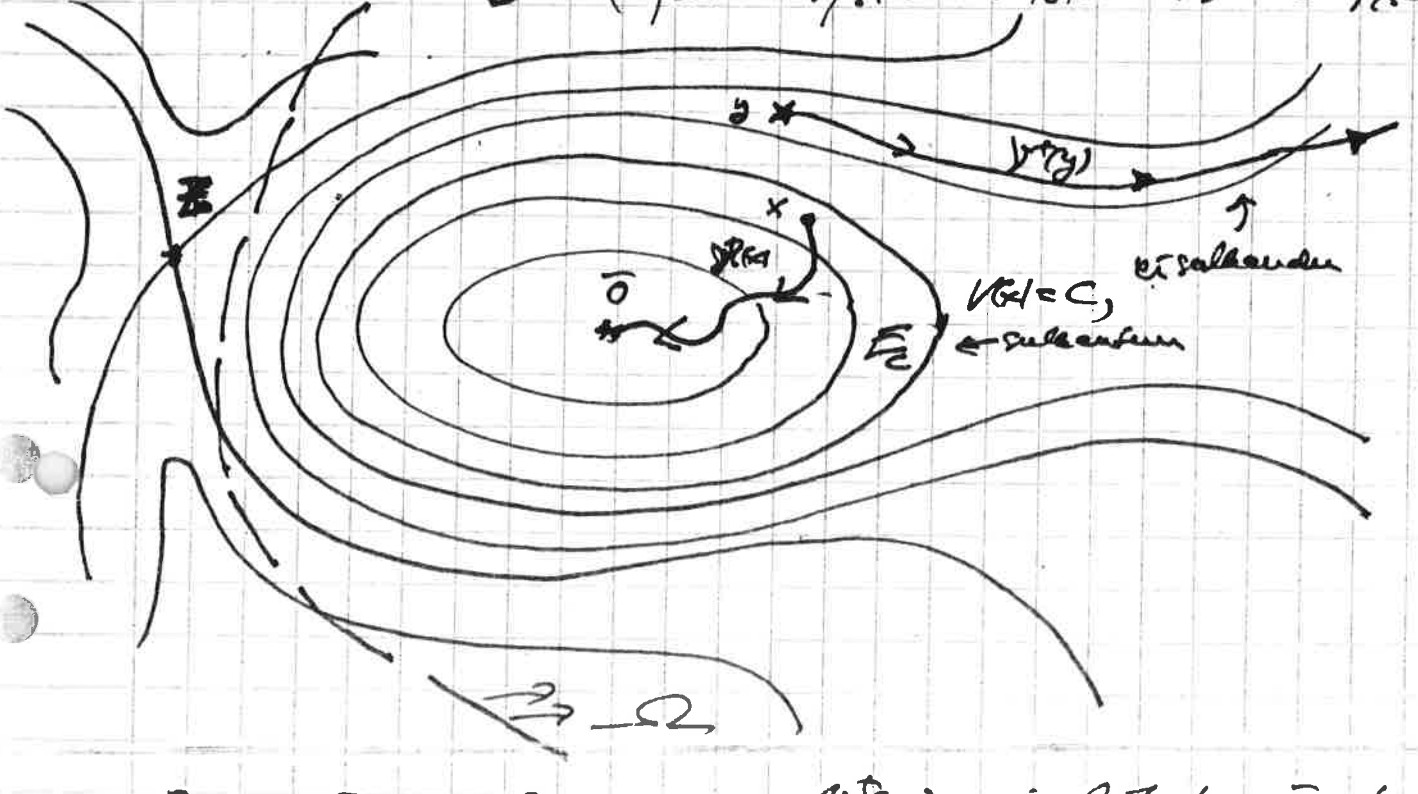
Jolloin $t\cdot x \to \bar{0}$. Siten $x \in \Psi$ ja siis $E_c \subset \Psi$. □

Lause 3.8. Olkoon $\bar{0}$ systeemin (1.1) tasapainotila ja $V: \Omega \to \mathbb{R}$ vahva Lyapunovin funktio. Olkoon $c>0$, jolla $\bar{E}_c$ kompakti ja $\bar{E}_c \subset \Omega$. ~~Tällöin tasapainotila $\bar{0}$ on asymptoottisesti stabiili ja~~ $E_c \subset \Psi$.

Tod. $N = \{\bar{0}\}$. □

Huom. Lauseissa 3.7–8 riittää että $\dot{V}(x)$ on negatiivisesti semidefiniitti tai neg. definiitti ja itse V on jatkuvasti derivoituva Ω:ssa,

Seuraava kuva havainnollistaa tilannetta, jossa V on vahva Lyapunovin funktio Ω:ssa, mutta on mahdollisesti määritelty laajemmassa alueessa D (, jossa systeemin toteutuvat säännöllisyysehdot):



Pisteestä y alkava rata $\gamma^+(y)$ voi loitota $\bar{0}$:sta. ~~Koska~~ Lyapunovin funktio V on vahva Ω:ssa, siinä ei ole muita systeemin kriittisiä pisteitä kuin $\bar{0}$. Ilmeisesti todista edellä sanottu, samoin seuraava (johon tarvitaan implisiittifunktiolause):

Tasa-arvokäyrien leikkauskohta, kuten z, ei sisälly alueeseen Ω.

Esimerkki 3.10. Esimerkin 3.2, $\begin{cases} \dot{x} = -x - 2y^2 \\ \dot{y} = xy - y^3, \end{cases}$

Lyapunovin funktio $V(x,y) = x^2+2y^2$ on vahva alueessa $\Omega = \mathbb{R}^2$, joten $E_c = \{(x,y) \mid V(x,y) = x^2+2y^2 \le c\} \subset \Omega$ kaikilla $c>0$, ja sulkeumat $\bar{E}_c$ ovat kompakteja. Lauseesta 3-8 seuraa nyt suoraan että

$$\mathbb{R}^2 = \bigcup_{c>0} E_c \subset \Psi \subset \mathbb{R}^2, \quad \text{joten } \Psi = \mathbb{R}^2.$$

Hyödyllinen kriteerio kaikkien lauseiden 3.7–8 oletuksen että sulkeuma $\bar{E}_c$ on kompakti:

Jos $$V_\infty = \lim_{r\to\infty} \inf\{V(x) \mid x \in \Omega,\ \|x\|>r\} = \infty, \qquad (3.16)$$
niin kaikki joukot $\bar{E}_c$ ovat rajoitettuja ja siten kompakteja.

Esimerkki 3.11.
$$\begin{cases} \dot{x} = -x(1-x^2-y^2) \\ \dot{y} = -y(1-x^2-y^2) \end{cases} \qquad (3.17)$$

jossa on tasapainotila 0. Etsitään sille Lyapunov. Funktio $V(x,y) = x^2+y^2$ on positiivisesti definiitti ja
$$\dot{V}(x,y) = -2(x^2+y^2)(1-x^2-y^2),$$
joten V on vahva Lyapunovin funktio alueessa
$$\Omega = \{(x,y) \mid x^2+y^2<1\} = E_1.$$

Olkoon $0<c<1$. Tällöin lauseen 3-8 nojalla 0 on asymptoottisesti stabiili ja $\bar{E}_c \subset \Psi$.
Siten $$E_1 = \bigcup_{0<c<1} E_c \subset \Psi.$$

Toisaalta, olkoon $z = (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{E}_1$. Tällöin $V(z) > 1$ ja $\dot{V}(z) > 0$. Väliarvolauseesta seuraa että $V(t\cdot z) > 1$ eli $t\cdot z \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{E}_1$ kaikilla $t \in I(z)$, $t \ge 0$. Itse asiassa $\|t\cdot z\| \to \infty$ tällöin. Koska Ψ on lauseen 3-? nojalla avoin, $\Psi = \Omega = E_1$.

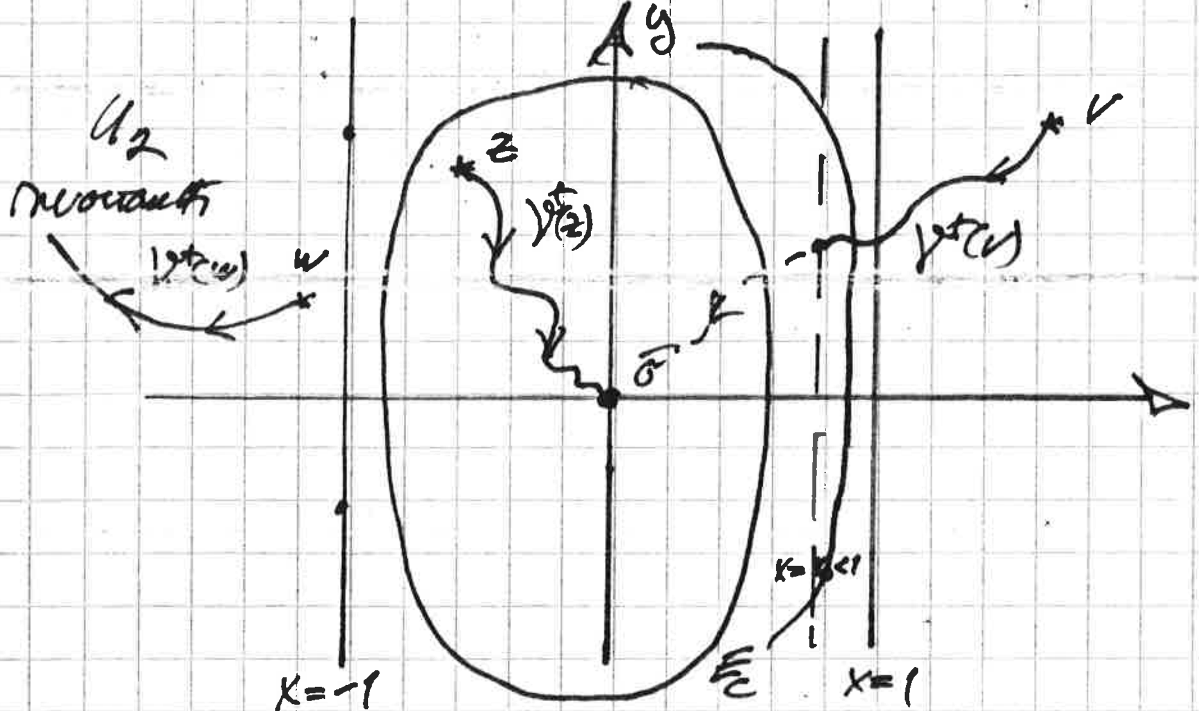
Harj.- Määrää edellisen esimerkin pohjin (66)
kaikki kriittiset pisteet, ja osoita niiden avulla joukot $\Omega = E_1$ ja $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega} = \{(x,y) \mid x^2+y^2>1\}$ invarianteiksi. Päättele tästä että $\Psi \subset \Omega$.

<u>Esimerkki 3.12.</u>
$$\begin{cases} \dot{x} = -x(1+x) \\ \dot{y} = -3y(1+x) \end{cases} \qquad (3.18)$$

Tällä on tasapainotila $\bar{0}$. Lyapunovin funktiota kokeillaan yritteellä
$$V(x,y) = x^2+ay^2, \quad a>0.$$
Se on positiivisesti definiitti koko $\mathbb{R}^2$:ssa (kaikilla $a>0$).
Pätee
$$\dot{V}(x,y) = -2x^2(1+x) - 6ay^2(1+x) = -2(x^2+3ay^2)(1+x),$$
joka on <u>kaikilla $a>0$</u> negatiivisesti definiitti alueessa $x>-1$. Siten $V(x,y)=x^2+ay^2$ on kaikilla $a>0$ vahva Lyapunovin funktio alueessa
$$\Omega = \{(x,y) \mid x>-1\} \subset D = \mathbb{R}^2.$$
$\bar{0}$ on asymptoottisesti stabiili.
Olkoon $z=(x,y)$, $|x|<1$. Tällöin löytyy sellaiset $0<c<1$ ja $a>0$, että $V(z)=x^2+ay^2<c$, nimittäin valitaan $c>x^2$ ja $a>0$ kyllin pieneksi. Tällöin $z \in E_c$. Selvästi $\overline{E}_c$ on kompakti ja $\overline{E}_c \subset \Omega$. Lauseen 3.8 nojalla
$$z \in E_c \subset \Psi.$$
Siten pätee
$$U_1 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid |x|<1\} \subset \Psi.$$

Voidaan myös päätellä että (ks. kuva)
$$A = \{(x,y) \mid x \geq 1\} \subset \Psi,$$
mutta (ks. kuva, kriittiset pisteet ja invarianssi)
$$U_2 = \{(x,y) \mid x<-1\} \subset \mathbb{R}^2 \setminus \Psi.$$

Siten $\Psi = A \cup U_1 = \Omega = \{(x,y) \mid x > -1\}$.

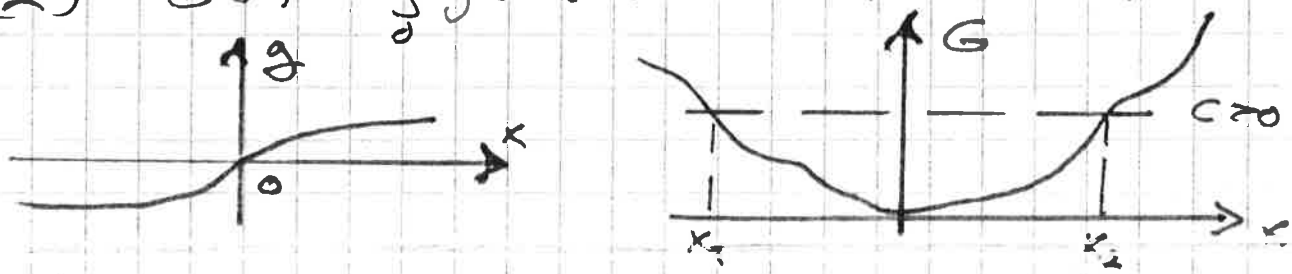


Esimerkki 3.13.
$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -g(x) - y, \end{cases} \qquad (3.19)$$

jossa funktio $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ~~[illegible]~~ $\in C^1(\mathbb{R})$ toteuttaa ehdot

(1) $x g(x) > 0$ kaikilla $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$; erityisesti $g(0) = 0$,

(2) $G(x) = \int_0^x g(s)\,ds \to \infty$ kun $|x| \to \infty$.



Funktio G kasvaa aidosti $|x|$:n myötä.

Koska $g(0)=0$, niin $\bar{0}$ on pisteen (3.19) tasapainotila.

Lyapunov: Funktio (eräänlainen "kokonaisenergia" yhtälön $\ddot{u} + \dot{u} + g(u) = 0$ "perustilanteella")

$$V(x,y) = G(x) + y^2/2$$

on positiivisesti definiitti alueessa $\Omega = \mathbb{R}^2 (\ni 0)$.

Lisäksi (2):n nojalla pätee (3.16), $V_{\partial\Omega}=\infty$. (68)
Siten joukot $\bar{E}_c$ ovat kompakteja ja luonnollisesti $\bar{E}_c \subset \Omega$, $c>0$.
Pätee $\dot{V}(x,y) = g(x)y + y(-g(x)-y) = -y^2 \leq 0$,
$\dot{V}$ on negatiivisesti semidefiniitti $\mathbb{R}^2$:ssa.
Siten V on heikko Lyapunovin funktio $\mathbb{R}^2$:ssa.
Lisäksi $N = \{(x,y)\in\Omega=\mathbb{R}^2 \mid \dot{V}(x,y)=0\} = \{(x,0)\mid x\in\mathbb{R}\}$.

Osoitetaan alla, että joukon N aidosti invariantti osajoukko on $\{\bar{0}\}$; silloin se on sitä kaikilla $N\cap \bar{E}_c$, $c>0$, ja lauseen 3.7 nojalla $\bar{0}$ on asymptoottisesti stabiili ja $E_c \subset \Psi$, $c>0$.

Olkoon $z\in N$ ja $t\cdot z = (t\cdot x, t\cdot y)\in N$.
Tällöin $y(t) = t\cdot y = \dot{x}(t) = 0$, joten $x(t)\equiv x_0$ ja $g(x_0) = \dot{y}(t) = 0$, joten (1):stä seuraa että $x_0=0$.
Siten $z=\bar{0}$, ja N:n aidosti invariantti osajoukko on $\{\bar{0}\}$.

Siis $E_c\subset\Psi$ kaikilla $c>0$. Jokaista $z=(x,y)\in\mathbb{R}^2$ kohti löytyy $c > G(x)+y^2/2$, jolla $z\in E_c$. Siten $\Psi=\mathbb{R}^2$: joten (3.19) kaikki ratkaisut ovat asymptoottisesti stabiileja siinä.

Lyapunovin teorian avulla voidaan epästabiilin tasapainotilan tapauksessa arvioida myös "loitonnusta", niiden pisteiden joukkoa, joista alkavat radat loittonevat tasapainotilasta (lause 3.3 ja esimerkki 3.7). Kyse on siis eräänlaisesta stabiilisuusalueen vastakohdasta.

III.4. Linearisointi, Poincarén stabiilisuuslause

Tässä alaluvussa todistetaan Poincarén stabiilisuuslauseena tunnettu tulos; se on esitetty jo aiemminkin, lauseena 3.4, mutta silloin auduttaen epätarkoin oletuksin: nyt kaikki oletukset korjataan pitävästi. Tarkastelun keskeinen idea on matriisieksponentti ja sen määrittelemä matriisifunktio, aloitetaan siitä.

Olkoon $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ säännöllinen matriisi. Eksponentti e^A määritellään $n\times n$-matriisien normiavaruudessa, jossa tavallinen operaattorinormi $\|\ast\|$ (tunnetusti kaikki normit ovat ekvivalentteja äärellisulotteisessa avaruudessa), sarjana

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = I + A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \cdots . \qquad (3.20)$$

Sarjan äärellisille osasummille saadaan arvio

$$\|S_i - S_j\| = \Big\|\sum_{k=j+1}^{i} \frac{A^k}{k!}\Big\| \le \sum_{k=j+1}^{i} \frac{\|A\|^k}{k!} \qquad (i \ge j)$$

jossa oikea puoli saadaan halutun pieneksi kyllin suurilla j, sillä

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\|A\|^k}{k!} = e^{\|A\|} < \infty .$$

Siis sarjan (3.20) osasummat on Cauchyn jono, ja koska kyseinen normiavaruus on äärellisulotteisena täydellinen, sarja (3.20) suppenee kohti jotain $n\times n$-matriisia.

Yhtälö (3.20) määrittelee matriisieksponenttifunktion $t \mapsto e^{At}$,

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(At)^k}{k!} = I + At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \frac{t^3}{3!}A^3 + \cdots \qquad (3.21)$$

ja on melko helppo nähdä seuraavien
sääntöjen pätevän:

(1) $e^{A0} = I$

(2) $\frac{d}{dt} e^{At} = A e^{At} = e^{At} A$,

erityisesti e^{At} toteuttaa matriisidifferentiaaliyhtälön

$$\dot{X} = AX.$$

Perustelu: derivointi termi termiltä sarjassa (3.21).

(3) Matriisifunktio e^{At} on lineaarisen homogeeniyhtälön (systeemin) $\dot{x} = Ax$ perusmatriisi, ts. sen sarakkeet muodostavat perusjärjestelmän.

Erityisesti jokaisella $c \in \mathbb{R}^n$ funktio $x(t) = e^{At}c$ on HS:n $\dot{x} = Ax$ ratkaisu, jolla $x(0) = c$.

(4) Transpoosille pätee $(e^{At})^T = e^{A^T t}$.

(5) Olkoot matriisin A ominaisarvot $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$, ja olkoon

$$\gamma > \max_{1 \le i \le n} \mathrm{Re}(\lambda_i).$$

Tällöin löytyy sellainen $C > 0$ että

$$\| e^{At} \| \le C e^{\gamma t} \text{ kaikilla } t \ge 0. \qquad (3.22)$$

Perustelu: HS:n $\dot{x} = Ax$ perusjärjestelmän funktioiden muoto (kurssi DY I), $\| * \| \le \| * \|_{Fr}$.

Alkuvalmistelujen jälkeen tarkastellaan tasapainotilaa $\bar{0}$ autonomisen systeemin linearisoinnissa

$$\dot{x} = Ax + g(x), \qquad (3.23)$$

jossa matriisi $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ on vakio, kuvaus g on lokaalisti Lipschitz, $g(\bar{0}) = \bar{0}$ ja

$\|g(x)\| = \|x\| \, O(x)$ ($O(x) \to 0$, kun $x \to \bar{0}$);

vrt. liite II (2-(5)) ja (2-(8)).

Vastaava lineaarinen approksimaatio on $\dot{x} = Ax$.

~~Esitetään~~ Poincarén lause kahdessa osassa ja käytetään niiden todistamiseen Lyapunovin lauseita 3.2 ja 3.3.

Lemma 3.3. Olkoot matriisin $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ominaisarvot negatiiviset, kompleksitapauksessa reaaliosa negatiivinen. Tällöin löytyy sellainen symmetrinen matriisi $K \in \mathbb{R}^{n \times n}$ että neliömuoto $V(x) = x^T K x$ on positiivisesti definiitti ja tämän lineaariseen systeemiin $\dot{x} = Ax$ liittyvälle derivaatalle $\overset{\circ}{V}$ pätee

$$\overset{\circ}{V}(x) = x^T (A^T K + KA) x = -\|x\|^2, \qquad (3.24)$$

ts. se on negatiivisesti definiitti.

Tod. Kun $V(x) = x^T K x$, niin systeemiin $\dot{x} = Ax$ liittyen yleisesti pätee

$$\overset{\circ}{V}(x) = \dot{x}^T K x + x^T K \dot{x} = x^T A^T K x + x^T K A x = x^T (A^T K + KA) x.$$

Matriisi K pitää siis valita sellaiseksi että

$$A^T K + KA = -I.$$

Tarkastellaan matriisifunktiota

$$t \mapsto e^{A^T t} e^{At}.$$

Sille pätee derivoinnin tulosääntöä ja kohdan (c) nojalla

$$\frac{d}{dt}\left(e^{A^T t} e^{At}\right) = A^T e^{A^T t} e^{At} + e^{A^T t} e^{At} A,$$

ja koska A^T:llä on täsmälleen samat ominaisarvot kuin A:lla, kohdan (5) nojalla löytyy sellaiset $c > 0$ ja $\gamma < 0$ että

$\|e^{A^Tt}\|, \|e^{At}\| < ce^{\gamma t}$ kaikilla $t \geq 0$.

Siten $\|e^{A^Tt}e^{At}\| \leq \|e^{A^Tt}\|\|e^{At}\| < c^2 e^{2\gamma t}$,

ja integraali $\int_0^\infty e^{A^Tt}e^{At}\,dt$ siis suppenee (integroituvan, kuten derivoituvan, paadaan alkioittain).

Saadaan

$$A^T\int_0^\infty e^{A^Tt}e^{At}\,dt + \int_0^\infty e^{A^Tt}e^{At}\,dt\,A = \int_0^\infty \frac{d}{dt}\left(e^{A^Tt}e^{At}\right)dt$$

$$= \lim_{t\to\infty} e^{A^Tt}e^{At} - e^{A^T0}e^{A0} = 0 - I = -I.$$

Siten voidaan valita

$$K = \int_0^\infty e^{A^Tt}e^{At}\,dt. \qquad (3.25)$$

Kohdan (4) nojalla

$$K^T = \int_0^\infty \left(e^{A^Tt}e^{At}\right)^T dt = \int_0^\infty (e^{At})^T(e^{A^Tt})^T dt = \int_0^\infty e^{A^Tt}e^{At}\,dt = K,$$

K on siis symmetrinen. Lisäksi

$$V(x) = x^TKx = \int_0^\infty (x^Te^{A^Tt})(e^{At}x)\,dt = \int_0^\infty (e^{At}x)^T(e^{At}x)\,dt > 0$$

kaikilla $x \neq \bar{0}$, sillä integrandi on ≥ 0 ja jo arvolla $t=0$ se on $x^Tx > 0$ (kun $x \neq \bar{0}$).

$\square$

<u>Lause 3.9. (Poincaré).</u> Olkoot matriisin $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ominaisarvot negatiiviset, kompleksitapauksessa reaaliosa negatiivinen. Olkoon funktio g lokaalisti Lipschitz ja $\|g(x)\| = \|x\|\,O(x)$, joista erityisesti $g(\bar{0}) = \bar{0}$. Tällöin autonomisen systeemin (3.23) tasapainotila $\bar{0}$ on asymptoottisesti stabiili.

Tod. Kuten lauseen 3.4 yhteydessä oli jo todettu, tämä tulos seuraa suoraan lauseesta 2.3, sillä g toteuttaa autonomisen ehdon (2.18). Annetaan kuitenkin uusi todistus matriisiesityksen ollessa käytössä.

Olkoon K kuten (3.25):ssä ja $V(x) = x^TKx$. Lemman 3.3 nojalla systeemiin (3.23) liittyvälle derivaatalle $\overset{\circ}{V}$ pätee

$$\overset{\circ}{V}(x) = \dot{x}^TKx + x^TK\dot{x} = x^T(A^TK+KA)x + g(x)^TKx + x^TKg(x) = -\|x\|^2 + 2g(x)^TKx.$$

Tämä on selvästi negatiivisesti definiitti jossain origon ympäristössä Ω, sillä

$$\|2g(x)^TKx\| \le 2\|g(x)\|\|K\|\|x\| = 2\|K\|O(x)\|x\|^2$$

ja $O(x) \to 0$ kun $x \to \bar{0}$. Siten V on systeemin (3.23) vahva Lyapunovin funktio alueessa Ω, ja voidaan käyttää lausetta 3.2. $\square$

Huom. Tasotapauksessa $n=2$, kun $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ja merkitään $p = a+d = \lambda_1+\lambda_2$ ja $q = ad-bc = \lambda_1\lambda_2$, pätee ensinnäkin $p<0$ ja $q>0$ lauseen oletuksin, ja saadaan konkreettiset esitykset

$$K = -\frac{1}{2pq}\begin{bmatrix} c^2+d^2+q & -ac-bd \\ -ac-bd & a^2+b^2+q \end{bmatrix} \tag{3.26}$$

ja $V(x) = x^TKx = -\frac{1}{2pq}\left[(dx_1-bx_2)^2 + (cx_1-ax_2)^2 + q(x_1^2+x_2^2)\right]$.

Lemma 3.4. Olkoot matriisin $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ominaisarvot $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ eri ja nollasta poikkeavat. Tällöin löytyy sellainen säännöllinen matriisi $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ että

$$\Lambda = B^{-1}AB = \mathrm{diag}(\lambda_k) = \begin{bmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{bmatrix}. \quad (3.27)$$

Jos ominaisarvot ovat lisäksi reaaliset, niin matriisit B, Λ ja $K = \Lambda^{-1}$ ovat reaalisia, ja saadaan esitysmuoto

$$W(x) = x^T K x = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 / \lambda_k . \quad (3.28)$$

Tällöin lineaariseen systeemiin $\dot{x} = \Lambda x$ liittyvälle derivaatalle $\dot{W}$ pätee

$$\dot{W}(x) = 2\|x\|^2,$$

joten se on positiivisesti definiitti.

Tod. Olkoot $u_1, \dots, u_n$ ominaisarvoihin liittyvät normitetut ominaisvektorit: $Au_k = \lambda_k u_k$, $\|u_k\| = 1$, $k = 1, \dots, n$. Jos ominaisarvot ovat reaaliset, myös ominaisvektorit voidaan valita reaalisiksi.

Määritellään yksinkertaisesti

$$B = [u_1 \cdots u_n] \in \mathbb{C}^{n \times n}.$$

Matriisi B on säännöllinen, koska ominaisarvot ovat eri ja tunnetusti silloin ominaisvektorit ovat riippumattomia. On helppo suoraviivaisesti laskea että B toteuttaa yhtälön (3.27). Nimittäin

$$AB = [Au_1 \cdots Au_n] \text{ ja } B^{-1}u_k = e_k \text{ (stand. kantav.)}$$

Reaalisuudet, kuten myös yhtälö (3.28) ovat selviöitä. Lisäksi systeemiin $\dot{x} = \Lambda x$ liittyen

$$\dot{W}(x) = \dot{x}^T K x + x^T K \dot{x} = x^T \Lambda \Lambda^{-1} x + x^T \Lambda^{-1} \Lambda x = 2\|x\|^2. \quad \square$$

<u>Lemma 3.5.</u> Olkoot matriisin $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ominaisarvot eri ja nollasta poikkeavat. Olkoon mukana aidosti kompleksisia ominaisarvoja, oletetaan

$$\lambda_1 = \alpha + i\beta, \quad \lambda_2 = \lambda_1^* = \alpha - i\beta, \quad \beta \neq 0 .$$

Tällöin löytyy sellainen säännöllinen reaalimatriisi $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ että

$$S = C^{-1}AC = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & & & \\ -\beta & \alpha & & & 0 \\ & & \lambda_3/2 & & \\ & 0 & & \lambda_4/2 & \\ & & & & \ddots \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n} \qquad (3.29)$$

on säännöllinen (reaalinen) lohkodiagonaalimatriisi. Olkoon

$$K = \begin{bmatrix} \operatorname{sign}(\alpha) & & & & \\ & \operatorname{sign}(\alpha) & & & 0 \\ & & \lambda_3^{-1} & & \\ & 0 & & \lambda_4^{-1} & \\ & & & & \ddots \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n})$$

siis reaalinen diagonaalimatriisi, ja

$$W(x) = x^T K x \quad \text{vastaava neliömuoto.}$$

Tällöin lineaariseen systeemiin $\dot{x} = Sx$ liittyvälle derivaatalle $\dot{W}$ pätee

$$\dot{W}(x) = 2|\alpha|(x_1^2 + x_2^2) + x_3^2 + x_4^2 + \cdots ,$$

joten se on positiivisesti definiitti, jos kaikkien ominaisarvojen reaaliosat ovat nollasta poikkeavia.

<u>Tod.</u> Edellisen lemman matriisit B ja Λ eivät ole nyt reaalisia. Kuitenkin pätee $u_2 = u_1^*$, koska $\lambda_2 = \lambda_1^*$ ja A on reaalinen.

Asetetaan

$$C = BD, \quad \text{jossa } D = \begin{bmatrix} 1 & -i & & & \\ 1 & i & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & \ddots \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n\times n},$$

jolloin C on selvästi kahden säännöllisen matriisin tulona säännöllinen matriisi. Merkitään

$u_k = (u_{1k}, u_{2k}, \dots, u_{nk}) \in \mathbb{C}^n$. Koska $u_2 = u_1^*$, niin

$$C = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{11}^* & u_{13} & \\ u_{21} & u_{21}^* & u_{23} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ u_{n1} & u_{n1}^* & u_{n3} & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -i & & & \\ 1 & i & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & \ddots \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} u_{11}+u_{11}^* & -iu_{11}+iu_{11}^* & u_{13} & u_{14} & \\ u_{21}+u_{21}^* & -iu_{21}+iu_{21}^* & u_{23} & u_{24} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ u_{n1}+u_{n1}^* & -iu_{n1}+iu_{n1}^* & u_{n3} & u_{n4} & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\mathrm{Re}(u_{11}) & 2\mathrm{Im}(u_{11}) & u_{13} & \\ 2\mathrm{Re}(u_{21}) & 2\mathrm{Im}(u_{21}) & u_{23} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ 2\mathrm{Re}(u_{n1}) & 2\mathrm{Im}(u_{n1}) & u_{n3} & \end{bmatrix}$$

$\in \mathbb{R}^{n\times n}$, ts. C on reaalimatriisi.

Laskemalla saadaan

$$S = C^{-1}AC = D^{-1}\underbrace{B^{-1}AB}_{=\Lambda}D = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & & & \\ i & -i & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -i & & & \\ 1 & i & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & \ddots \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \lambda_1+\lambda_2 & -i\lambda_1+i\lambda_2 & & & \\ i\lambda_1-i\lambda_2 & \lambda_1+\lambda_2 & & & \\ & & \lambda_3 & & \\ & & & \lambda_4 & \\ & & & & \ddots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & & & \\ -\beta & \alpha & & & \\ & & \lambda_3/2 & & \\ & & & \lambda_4/2 & \\ & & & & \ddots \end{bmatrix}$$

oli (3.29). Lisäksi systeemiin $\dot{x} = Sx$ liittyen

$$\dot{W}(x) = \dot{x}^T Kx + x^T K\dot{x} = x^T(S^TK + KS)x = x^T \begin{bmatrix} 2\,\mathrm{sign}(\alpha)\alpha & & & \\ & 2\,\mathrm{sign}(\alpha)\alpha & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \ddots \end{bmatrix} x$$

$$= 2|\alpha|(x_1^2+x_2^2) + x_3^2 + x_4^2 + \cdots \quad \square$$

Lause 3.10 (Poincaré). Olkoot matriisin $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ominaisarvot eri ja nollasta poikkeavat, kompleksitapauksessa myös reaaliosa nollasta poikkeava. Olkoon joukossa ainakin yksi positiivinen tai reaaliosaltaan positiivinen ominaisarvo. Olkoon funktio g lokaalisti Lipschitz ja $\|g(x)\| = \|x\| O(x)$, jolloin erityisesti $g(\bar{0}) = \bar{0}$. Tällöin autonomisen systeemin (3.23) tasapainotila $\bar{0}$ on epästabiili.

Tod. Jaetaan todistus kahteen osaan sen mukaan ovatko A:n kaikki ominaisarvot reaalisia vai eivät – kuten jaottelu on tehty lemmassa 3.4–5.

(1) Ominaisarvot reaalisia; Sovelletaan lemmaa 3.4. Olkoon $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ kuten siinä. Tehdään systeemiin (3.23) muuttujan vaihdos

$$x = By \iff y = B^{-1}x, \qquad (3.30)$$

jolloin se saa muunnetun kanssa yhtäpitävän muodon

$$\dot{y} = \Lambda y + h(y), \qquad (3.31)$$

jossa $\Lambda = B^{-1}AB = \operatorname{diag}(\lambda_k)$ ja $h(y) = B^{-1}g(By)$ sekä

$$\|h(y)\| = \|g(By)\| \le \|B\|\,\|y\|\,O(By) \overset{\|B^{-1}\|}{=} \|y\|\,O(y),$$

erityisesti $h(\bar{0}) = \bar{0}$; systeemin (3.23) tasapainotila $\bar{0}$ muuntuu systeemin (3.31) tasapainotilaksi $\bar{0}$. Kummassakin systeemissä tämän tasapainotilan stabiilisuusominaisuudet ovat täysin samat, koska löytyy sellaiset $m, M > 0$ että muuttujan vaihdossa (3.30) pätee

$$m\|y\| \le \|x\| \le M\|y\| \quad \text{kaikilla } x,\ y = B^{-1}x.$$

Voidaan siis suoraan olettaa että systeemi on muotoa (3.31).

$$\text{Olkoot } K = \Lambda^{-1} \text{ ja } W(y) = y^T K y.$$

Tällöin lemman 3.4 nojalla systeemiin (3.31) liittyvä derivaatalle $\mathring{W}$ pätee

$$\mathring{W}(y) = \mathring{y}^T K y + y^T K \mathring{y} = y^T(\underline{I}\,\underline{\Lambda}^{-1} + \underline{\Lambda}^{-1}\underline{I})y + h(y)^T K y + y^T K h(y)$$
$$= 2\|y\|^2 + 2y^T K h(y),$$

jossa $\|2y^T K h(y)\| \leq 2\|K\|\, O(y)\|y\|^2 = O(y)\|y\|^2$. Löytyy siis sellainen origon ympäristö Ω, että $\mathring{W}(y)$ on siinä positiivisesti definiitti.

Koska jokin ominaisarvo on positiivinen, jokaisesta origon ympäristöstä löytyy piste y jossa $W(y) = y^T K y > 0$. Voidaan siis käyttää lausetta 3.3, ja sen nojalla tasapainotila $\bar{0}$ on epästabiili. $\square$

(2) Mukana kompleksisia ominaisarvoja; sovelletaan lemmaa 3.5, muunnoksessa siinä esiintyvä matriisi $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Muutoin menetellään aivan vastaavalla tavalla kuin kohdassa (1), luonnollisesti K kuten lemmassa 3.5. Erityisesti sen diagonaalilla on jälleen positiivisia alkioita, joten $W(y) > 0$ joissakin y lähellä origoa. Voidaan soveltaa lausetta 3.3. $\square$

Huom. Myös lause 3.9 voidaan todistaa lemmojen 3.4 ja 3.5 avulla, kyseisen yhdellä lisäoletuksella heikennettynä. Mikä tämä on? Mitä lemmoista tulee säätää verrattuna käyttöön lauseessa 3.10.

Esimerkki 3.14. Autonomisessa kolmikossa

$$\begin{aligned}
\mathring{x}_1 &= -x_1 + x_2^2 + x_3^2 \\
\mathring{x}_2 &= x_1 - 2x_2 + x_1^2 \\
\mathring{x}_3 &= x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_2 x_3
\end{aligned} \qquad (3.32)$$

origo $\bar{0}$ on kriittinen piste. Kirjoitetaan $x = (x_1, x_2, x_3)$.

Origossa linearisoitu systeemi tulee

$$\dot{x} = f(x) = Ax + g(x),$$

jossa $A = Df(\bar{0}) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$ ja $g(x) = (x_2^2 + x_3^2,\ x_1^2,\ x_2 x_3)$ on $C^1(\mathbb{R}^3)$-funktiona lokaalisti Lipschitz.

Matriisin A ominaisarvot:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & -2-\lambda & 0 \\ 1 & 2 & -3-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+3) = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2,$$

$\lambda_3 = -3 \in \mathbb{R}$, negatiiviset. Voidaan käyttää lausetta 3.9. Sen nojalla systeemin tasapainotila $\bar{0}$ on asymptoottisesti stabiili.

<u>Esimerkki 3.15</u> Analysoidaan autonomisen parin

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y(x+1) = y + xy \\ \dot{y} &= x(1+y^3) = x + xy^3 \end{aligned} = f(x,y) \quad (3.33)$$

tasapainotilojen laadut. Tilat ovat $\bar{0}$ ja $(-1,-1)$.

Tilan $\bar{0}$ osalta systeemin linearisointi on jälleen suoraan nähtävissä:

$$A = Df(\bar{0}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ ja } g(x,y) = (xy, xy^3) \in C^1(\mathbb{R}^2).$$

Matriisin A ominaisarvot: $\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix}$ $= \lambda^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, eli $\lambda_1 = 1 > 0$. Lauseen 3.10 nojalla tasapainotila $\bar{0}$ on epästabiili.

Linearisoidaan pari pisteessä $(-1,-1)$:

$$Df(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y & 1+x \\ 1+y^3 & 3xy^2 \end{bmatrix},$$

erityisesti $A = Df(-1,-1) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$, ja pari voidaan kirjoittaa

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = f(x,y) - f(-1,-1) = A \begin{bmatrix} x+1 \\ y+1 \end{bmatrix} + h(x,y),$$

jossa differentiaalikehitelmän mukaisesti

$$\|h(x,y)\| = \|(x+1,y+1)\|\, O(x+1,y+1).$$

Muuttujan vaihto $u=x+1$, $v=y+1$ siirtää kriittisen pisteen $(-1,-1)$ origoon, ja saadaan yhtäpitävästi

$$\begin{bmatrix}\dot u\\ \dot v\end{bmatrix} = A\begin{bmatrix}u\\ v\end{bmatrix} + g(u,v),$$

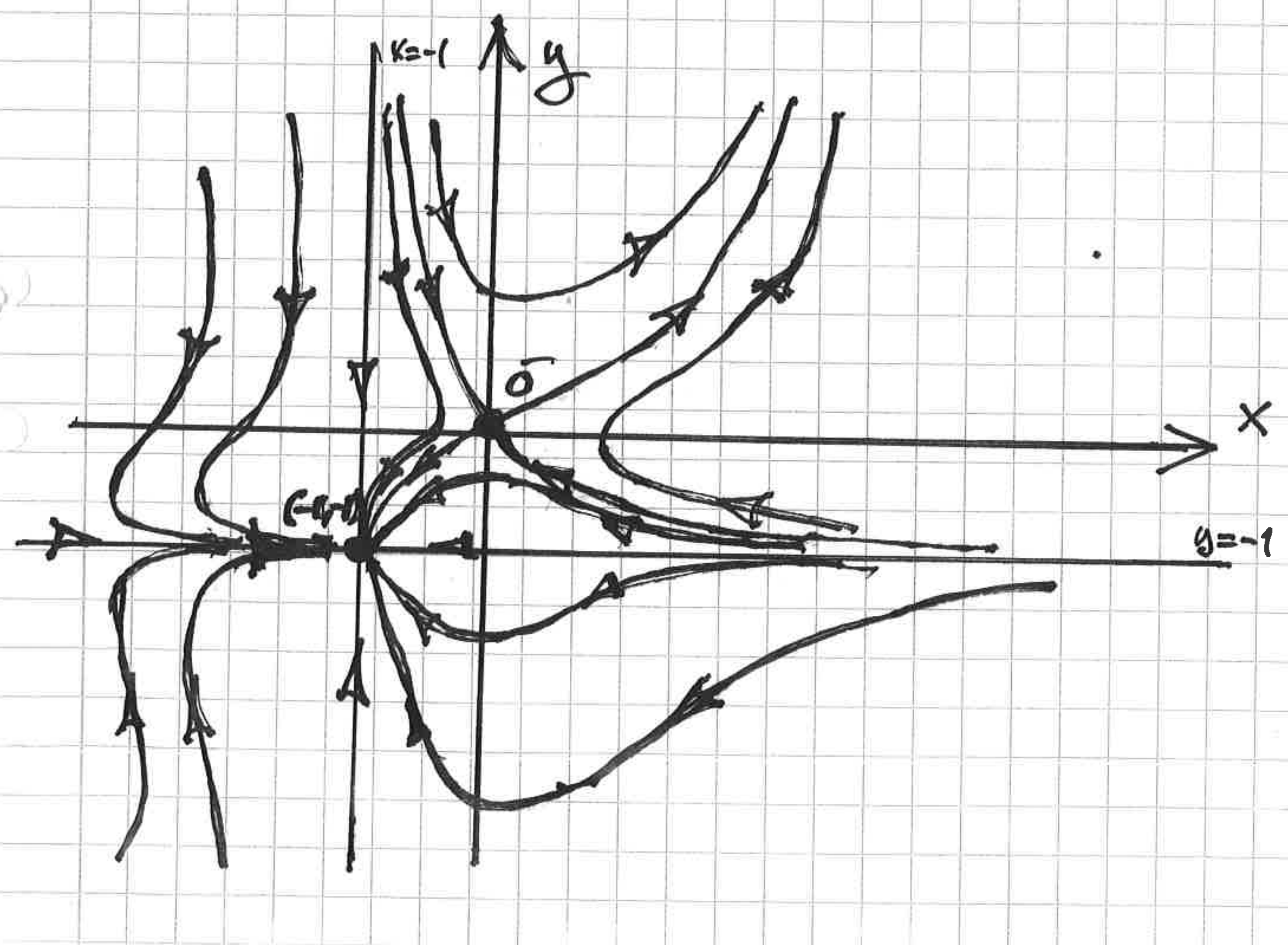
jossa $g(u,v) = h(x,y) = h(u-1,v-1)$ ja

$$\|g(u,v)\| = \|(u,v)\|\, O(u,v).$$

Tämä siirto on kuitenkin turha, sillä systeemissä on sama linearisointimatriisi A, ja vain sitä tarvitaan.

Matriisin A ominaisarvot ovat $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=-3\in\mathbb{R}$, negatiiviset. Lauseen 3.9 nojalla tasapainotila $(-1,-1)$ on asymptoottisesti stabiili systeemissä (3.33), koska $\bar{0}$ on sitä siirron antamassa systeemissä.

Oheessa parin (3.33) virtauskuvio.



IV. Autonomiset systeemit tasossa: Poincarén–Bendixsonin lause

Taso-ongelmassa, kun $n=2$, systeemin lopputilaa koskevaa tulosta, luvun I lauseella 1.4, voidaan huomattavasti parantaa. Lopputilalla tarkoitetaan rajajoukkoa, kuten se on määritelty luvussa I. Kerrataan: Olkoon $x \in D$. Sen kautta kulkevan ratkaisun $t \cdot x$ rata positiiviseen suuntaan on

$$\gamma^+(x) = \{ t \cdot x \mid 0 \le t < t^+(x) \},$$

ja kyseisen ratkaisun rajajoukko (positiiviseen suuntaan) on

$$\omega(x) = \bigcap_{0 \le t < t^+(x)} \mathrm{cl}_D \left(\gamma^+(t \cdot x) \right). \quad (4.1)$$

Luvussa I todistettiin poistumislauseen avulla:

Jos $t^+(x) < \infty$, niin $\omega(x) = \emptyset$. $\quad (4.2)$

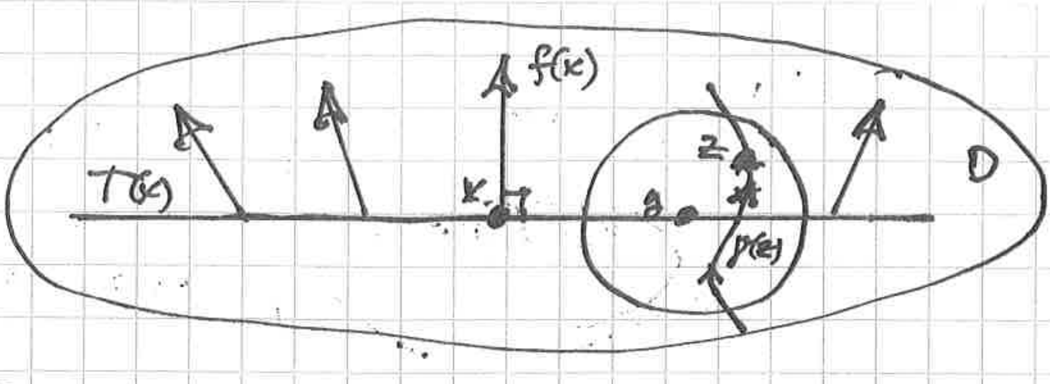
Siten lopputilan kannalta tilanne on mielenkiintoinen vain kun $t^+(x) = \infty$ eli $[0, \infty[\subset \Delta(x)$

Lemma 4.1. Olkoon piste $x \in D$ tavallinen, s.o. $f(x) \neq \bar{0}$. Tällöin on olemassa x-keskinen avoin jana $T(x)$ jolle pätee:

(a) Jana $T(x)$ ja vektori $f(x)$ ovat kohtisuorassa.

(b) Jokaista $y \in T(x)$ kohti löytyy sellainen pisteen y ympäristö U, että jos $z \in U$, niin leikkaus $\gamma(z) \cap T(x)$ sisältää ainakin yhden pisteen.

(c) $f(y) \cdot f(x) > 0$ kaikilla $y \in T(x)$.



Tod. Koska $f(x) \neq \bar{0}$, kohdan (a) mukainen kohtisuora jana löytyy, ja valitsemalla se tarpeeksi lyhyeksi jatkuvuuden ansiosta myös kohta (c) saadaan voimaan.

(b) Lauseen 1.3 mukaan virtauskuvaus $\phi = \phi(t,x) = t \circ x$ on määritelty (t,x)-avaruuden avoimessa osajoukossa Ω. Siten löytyy sellaiset $\alpha > 0$ ja $r > 0$ että

$$B(x,r) \times]-\alpha,\alpha[\subset \Omega,$$

siis kaikilla $z \in B(x,r)$ pätee

$$]-\alpha,\alpha[\subset \Delta(z). \qquad (4.3)$$

Lisäksi r voidaan valita niin pieneksi että

$$f(z) \cdot f(x) \geq \tfrac{1}{2} \|f(x)\|^2 \text{ kaikilla } z \in B(x,r). \quad (4.4)$$

Janan $T(x)$ säteeksi valitaan tämä r (tai pienempi).

Olkoon $y \in T(x)$, ja olkoon $0 < \beta < \alpha/2$ sellainen ($\beta = \beta(y)$ riippuu y:stä) että

$$y(t) = t \cdot y \in B(x,r) \text{ kaikilla } t \in [-2\beta, 2\beta].$$

Valitaan sitten $U = U(y)$ niin pieneksi että

(1) $z(t) = t \cdot z \in B(x,r)$ kaikilla $z \in U$ ja $t \in [-\beta,\beta]$.

Tämä on mahdollista, koska virtauskuvaus ϕ on kompaktissa joukossa tasaisesti jatkuva — sovelletaan tätä funktioihin $y(t)$ ja $z(t)$.

(2) $\frac{1}{2}\beta \|f(x)\|^2 > |(z-x) \cdot f(x)|$ kaikilla $z \in U$.

Tämä on jatkuvuuden nojalla mahdollista, koska $(y-x)\cdot f(x)=0$ kohdan (a) nojalla.

Huom. Luku β voidaan valita kuinka pieneksi tahansa, kunhan ympäristöä U vastaavasti pienennetään kohdan (c) vaatimalla tavalla. Seikka, jolla on käyttöä myöhemmin.

Olkoon $z\in U$, ja päteköön vaikka $(z-x)\cdot f(x)\geq 0$. Tällöin

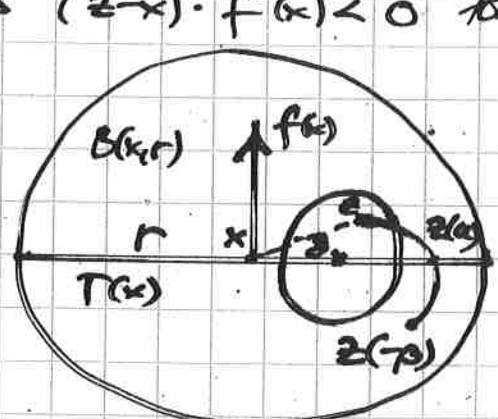
$$(\overset{z(0)}{z}-x)\cdot f(x)-(z(-\beta)-x)\cdot f(x)=\int_{-\beta}^{0}\dot z(t)\cdot f(x)\,dt=$$

$$\int_{-\beta}^{0} f(z(t))\cdot f(x)\,dt \overset{(c)\,ja\,(1)}{\geq} \frac{1}{2}\int_{-\beta}^{0}\|f(x)\|\,dt=\frac{\beta}{2}\|f(x)\|^2 \overset{(2)}{>}(z-x)\cdot f(x),$$

joten $(z(-\beta)-x)\cdot f(x)<0$.

Bolzanon lauseen nojalla löytyy sellainen $a\in\,]-\beta,0[$ että $(z(a)-x)\cdot f(x)=0$. Tällöin (1):n nojalla $z(a)\in B(x,r)$, joten kohdan (a) nojalla $z(a)\in T(x)$. Siten $z(a)\in T(x)\cap\gamma(z)$.

Tapaus $(z-x)\cdot f(x)<0$ käsitellään vastaavalla tavalla. □



Huom. $|a|<\beta$.

Lemman ehdot toteuttavaa avointa janaa $T(x)$ kutsutaan pisteeseen x liittyväksi transversaalijanaksi. Sen tehtävä on ilmeinen: jossain x:n ympäristössä virtaus leikkaa janan $T(x)$, ja vieläpä samalta puolelta, kuten todistuksesta näkyy: $\dot z(t)\cdot f(x)>0$ kaikilla $t\in[-\beta,\beta]$. Janaa $T(x)$ voidaan aina tarpeen mukaan lyhentää, esimerkiksi niin että jokaisella $y \in T(x)$ relaatio $t\cdot y \in T(x)$ pätee eräällä aikavälillä $]-\delta,\delta[$ vain kun $t=0$, missä $\delta>0$ ei riipu y:stä (muuten lyhennä x:ssä); riittää vain valita sellaiset $r>0$ ja $\delta>0$ että kaikilla $y\in T(x)$ pätee $]-\delta,\delta[\subset \Delta(y)$ ja $f(y(t))\cdot f(x)>0$, kun $t\in\,]-\delta,\delta[$.

<u>Lemma 4.2.</u> Olkoon $x\in D$ tavallinen piste ja $T(x)$ transversaalijana (kyllin lyhyt). Olkoon $z\in D$. Oletetaan että $t_k\cdot z\in T(x)$ nousevassa aikajonossa $t_0<t_1<t_2<\dots$. Tällöin pistejono $(t_k\cdot z)$ järjestyy monotonisesti janalle $T(x)$.

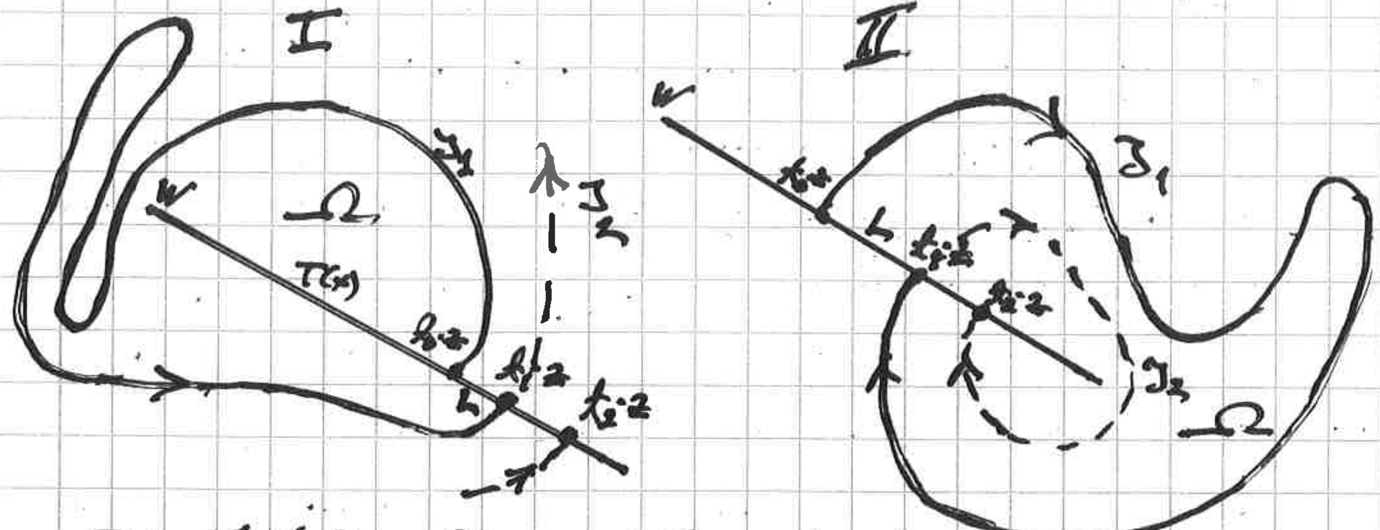
<u>Tod.</u> Edellistä lemmaa seuraavan huomautuksen nojalla voidaan olettaa, että $t\cdot z\notin T(x)$ aina kun $t_0<t<t_1$ tai $t_1<t<t_2$. Riittää osoittaa monotonisuus pistekolmikolle $t_0\cdot z$, $t_1\cdot z$ ja $t_2\cdot z$. Lisäksi voidaan olettaa että peräkkäiset pisteet ovat eri, sillä muutoin rata on periodinen ja asia on selvä.

Käyrät

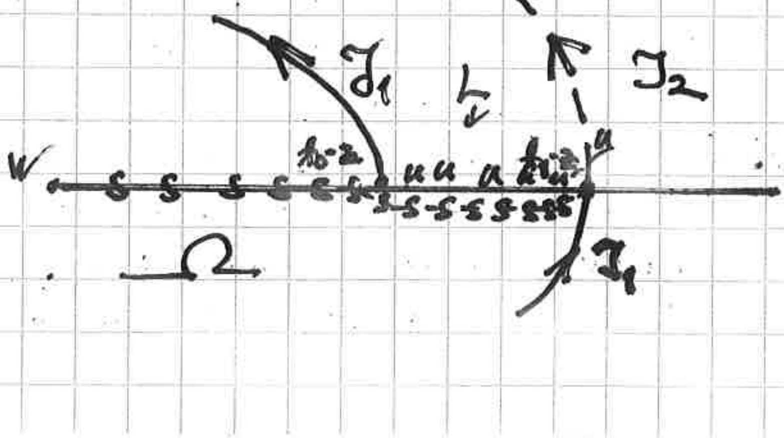
$J_1=\{t\cdot z\mid t_0\le t\le t_1\}$ ja $J_2=\{t\cdot z\mid t_1\le t\le t_2\}$

palaavat janalle $T(x)$ eri puolelta kuin lähtevät, mikä seuraa virtauksen suunnasta (huomautus lemman jälkeen). Lisäksi voidaan olettaa että ne eivät leikkaa itseään, ja niiden ainoa yhteinen piste on $t_1\cdot z$ — ja mahdollisesti $t_0\cdot z=t_2\cdot z$; tämä kaikki seuraa melko suoraan systeemin ratkaisun yksikäsitteisyydestä.

Olkoon w janan $T(z)$ päätepiste, joka toteuttaa järjestyksen $w, t_0 \cdot z, t_1 \cdot z$. Pisteitä $t_0 \cdot z$ ja $t_1 \cdot z$ yhdistävä jana olkoon L. Yhdessä sen kanssa J_1 muodostaa Jordanin käyrän; Jordanin käyrälauseen nojalla tämä rajoittaa alueen Ω, jonka reuna on $\partial \Omega = J_1 \cup L$. Seuraavat kuvat esittävät käyrän J_1 kulun kaksi mahdollisuutta:



I: Jokin janan $]w, t_0 \cdot z[$ piste sisältyy Ω-alueeseen. Reunanylityslauseesta seuraa että kaikki kyseisen janan pisteet sisältyvät alueeseen Ω. Tästä seuraa melko helposti — joskin auki kirjoitettuna melko pitkästi — että käyrän J_2 alkupisteet (ei $t_1 \cdot z$) ovat joukon $\bar{\Omega} = \Omega \cup J_1 \cup L$ komplementissa; seuraava kuva kertoo todistuksen idean (tee asia itsellesi selväksi): s = Ω:n piste (sisäpiste) ja u = komplementin $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{\Omega}$ piste (Ω:n ulkopiste).



Tutkitaan pisteen $t_2\cdot z$ sijaintia janalla $T(x)$:

Koska J_2:n alkupisteet ovat alkupisteitä ja jana $]w, t_0\cdot z[$ koostuu sisäpisteistä, niin $t_2\cdot z \notin]w, t_0\cdot z[$, koska muutoin J_2 kohtaisi Ω:n reunan $J_1 \cup L$, siten käyrän J_1, pisteessä joka ei ole $t_1\cdot z$ eikä $t_0\cdot z = t_2\cdot z$. Tämä on kaitoulun todistuksen alkuosan nojalla mahdotonta.

Jos $t_2\cdot z = t_0\cdot z$ tai $t_2\cdot z \in L$, niin virtauksen suunnan vuoksi J_2:n pitäisi lähestyä pistettä $t_2\cdot z$ alueen Ω sisäpisteistä käsin. Jälleen J_2 kohtaisi Ω:n reunan, tarkemmin J_1:n, pisteessä joka ei ole $t_1\cdot z$ eikä $t_0\cdot z = t_2\cdot z$. Mahdotonta.

Siten pisteestä w lukien pisteiden järjestys on $t_0\cdot z$, $t_1\cdot z$, $t_2\cdot z$, ts. monotoninen.

II: jokin janan $]w, t_0\cdot z[$ piste kuuluu komplementtiin $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega}$. Tällöin koko jana sisältyy komplementtiin, ja s ja u vain vaihtavat paikkaa tapaukseen I verrattuna; muuten todistus menee samalla tavalla. $\square$

Huom. Dimensio $n=2$ näyttelee keskeistä roolia nimenomaan lemmassa 4.2.

Lemma 4.3. Olkoon $x \in D$ ja $y \in \omega(x)$. Olkoon $w \in D$ tavallinen piste ja $T(w)$ transversaalijana. Tällöin joukko $\omega(x) \cap T(w)$, kuten myös joukko $\gamma^+(y) \cap T(w)$, sisältää korkeintaan yhden pisteen.

Tod. Väitteen jälkimmäinen osa seuraa edellisestä, sillä lauseen 1.4 kohdan (c) nojalla $\gamma^+(y) \subset \omega(x)$.

Oletetaan että löytyisi $y, z \in \omega(x) \cap T(w)$, $y \neq z$. Valitaan sellainen lauseen 1.4 mukainen aikajono (t_k') että $t_k' \to \infty$ ja $t_k' \cdot x \to y$. Valitaan lemman 4.1 todistuksessa esiintyvä luku $\beta > 0$, nyt luvut β_k niin että $\beta_k \to 0$. Vastaavasti y:n ympäristöt U_k lemmassa voidaan valita niin pieniksi että se toteutuu kaikilla k, kuten todistuksen yhteydessä huomautettiin. Koska $t_k' \cdot x \to y$, ja osajonoon voidaan aina siirtyä, voidaan olettaa että $t_k' \cdot x \in U_k$. Todistuksessa lisäksi nähtiin, että löytyy luvut $u_k \in \mathbb{R}$ joilla $|u_k| < \beta_k$ ja $(t_k' + u_k) \cdot x \in T(w)$. Erityisesti $u_k \to 0$.

Merkitään $t_k = t_k' + u_k$. Lauseen 1.3 nojalla

$$t_k \cdot x = (t_k' + u_k) \cdot x = u_k \cdot (t_k' \cdot x) \to 0 \cdot y = y.$$

Siten aikajonolle (t_k) pätee:

$$t_k \to \infty, \ t_k \cdot x \to y \text{ ja } t_k \cdot x \in T(w).$$

Vastaavasti löytyy sellainen aikajono (s_k) että $s_k \to \infty$, $s_k \cdot x \to z$ ja $s_k \cdot x \in T(w)$. Koska $y \neq z$, pisteiden $t_k \cdot x$, $s_k \cdot x \in T(w)$, $k = 1, \ldots$, muodostama joukko ei toteuta monotonista järjestystä janalla $T(w)$, mikä on vastoin lemmaa 4.2. $\square$

<u>Lemma 4.4.</u> Jos $\gamma^+(x) \cap \omega(x) \neq \emptyset$, niin piste $x \in D$ on periodinen, jolloin erityisesti $\gamma(x) = \omega(x)$ on periodinen rata.

<u>Tod</u>. Voidaan olettaa että x on tavallinen piste. Olkoon $y \in \gamma^+(x) \cap \omega(x)$; tällöin, koska x ei ole kriittinen, ei ole myöskään y. Olkoon $T(y)$ transver-

saalijana ja (t_k') aikajono jolla $t_k' \to \infty$ ja $t_k' \cdot x \to y$. Kuten edellisen lemman todistuksessa, löytyy aikajono (t_k) jolla $t_k \to \infty$, $t_k \cdot x \to y$ ja $t_k \cdot x \in T(y)$.

Koska $y \in \gamma^+(x)$, jollakin $t_0 \geq 0$ pätee $y = t_0 \cdot x$ ja siten

$$t_k \cdot x = (s_k + t_0) \cdot x = s_k \cdot y \in \gamma^+(y) \cap T(y), \text{ kun } t_k \geq t_0.$$

Lemman 4.3 nojalla tällöin pätee $s_k \cdot y = y$. Siten piste y on periodinen, ja koska $y = t_0 \cdot x$, myös piste x on.

Väitteen loppuosa on tämän jälkeen selvä. □

<u>Lemma 4.5.</u> Olkoon $K \subset D$ kompakti ja $\gamma^+(x) \subset K$. Olkoon $y \in \omega(x)$ periodinen piste, erityisesti $f(y) \neq \bar{0}$. Tällöin $\omega(x) = \gamma(y)$.

<u>Tod</u>. Koska K on kompakti ja $\gamma^+(x) \subset K$, lauseen 1.4 nojalla $\omega(x)$ on (epätyhjä) yhtenäinen ja invariantti. Siten erityisesti $\gamma(y) \subset \omega(x)$.

Osoitetaan inkluusio toiseen suuntaan. Vastaoletus: $\omega(x) \not\subset \gamma(y)$. Kompaktin joukon, periodisen, jatkuvana kuvana joukko $\gamma(y)$ on kompakti ja siten suljettu. Koska $\omega(x)$ on yhtenäinen ja $\gamma(y) \neq \omega(x)$, joukon $\gamma(y)$ reuna joukossa $\omega(x)$ on epätyhjä. Olkoon z tämän reunan piste. Tällöin $z \in \gamma(y)$, ja z:n jokainen ympäristö leikkaa komplementtia $\omega(x) \setminus \gamma(y)$. Siten löytyy jono (x_k) komplementin $\omega(x) \setminus \gamma(y)$ pisteitä jolla $x_k \to z$.

Koska $z \in \gamma(y)$, pätee $f(z) \neq \bar{0}$. Olkoon $T(z)$ transversaalijana. Lemman 4.1 nojalla

tarpeeksi suurella k rata $\gamma(x_k) \subset \omega(x)$ leikkaa janan $T(z)$, sanotaan pisteessä w.
Tällöin $z, w \in \omega(x) \cap T(z)$, joten lemman 4.3 nojalla $w = z$. Siten joillakin $t_1 \in \mathbb{R}$ pätee

$$x_k = t_1 \cdot w = t_1 \cdot z \in \gamma(y) \quad (w \in \gamma(x_k) \text{ ja } z \in \gamma(y)).$$

Riittää osoittaa että $\omega(x) \subset \gamma(y)$. □

Lause 4.1 (Poincarén-Bendixsonin lause).

Olkoon tarkasteltavan autonomisen systeemin (1.1) dimensio $n = 2$. Olkoon $K \subset D$ kompakti, $x \in K$ ja $\gamma^+(x) \subset K$. Jos rajajoukossa $\omega(x)$ ei ole kriittisiä pisteitä, niin se on epätyhjä periodinen rata.

Tod. Lauseen 1.4 nojalla joukko $\omega(x)$ on epätyhjä, kompakti ja invariantti. Olkoon $y \in \omega(x)$. Koska $\gamma^+(y) \subset \omega(x) \subset K$, myös rajajoukko $\omega(y)$ on epätyhjä. Lisäksi $\omega(y) \subset \omega(x)$.

Olkoon $z \in \omega(y)$. Tällöin $f(z) \neq \bar{0}$. Olkoon $T(z)$ transversaalijana. Koska

$$z \in \omega(y) \cap T(z) \subset \omega(x) \cap T(z),$$

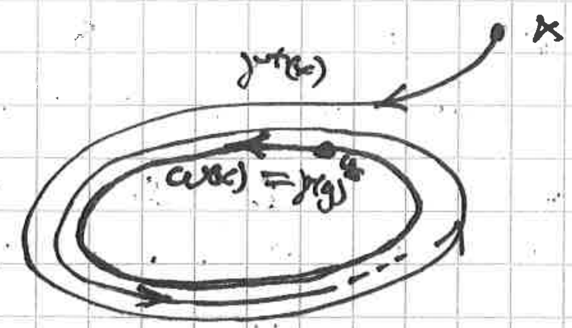
lemman 4.3 nojalla $\omega(x) \cap T(z) = \{z\}$.

Helposti nähdään, kuten edellä ~~aikaisemmin~~ (lemman 4.1 todistus), että $\gamma^+(y) \cap T(z) \neq \emptyset$. Koska $\gamma^+(y) \subset \omega(x)$, niin edellä esitetyn nojalla

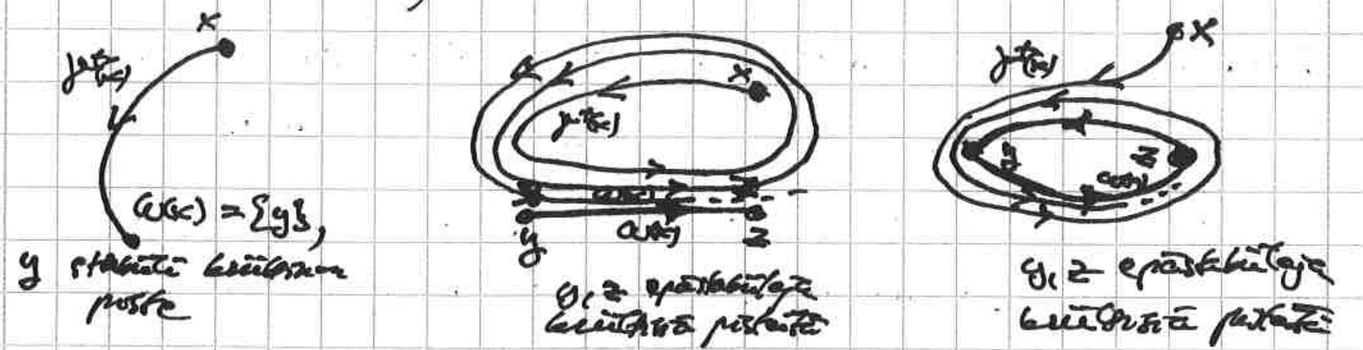
$$\gamma^+(y) \cap T(z) = \{z\}, \text{ ts. } z \in \gamma^+(y).$$

Siten, koska $z \in \gamma^+(y) \cap \omega(y)$, lemman 4.4 nojalla y on periodinen piste, erityisesti $f(y) \neq \bar{0}$. Lemman 4.5 nojalla $\omega(x) = \gamma(y)$, joten $\omega(x)$ on periodinen rata. □

Kuva esittää lauseen tilanteen (ei kriittisiä pisteitä)



Huom. Poincarén–Bendixsonin lauseesta saadaan muunnos myös tilanteeseen, jossa $\omega(x)$ sisältää äärellisen määrän kriittisiä pisteitä (muuten samat oletukset). Tällöin rajajoukko $\omega(x)$ koostuu kriittisistä pisteistään yhdistävistä radoista (kyseisten pisteiden lisäksi), ja näitä ratoja on äärellinen määrä. Jos kriittisiä pisteitä on useampia, ne kaikki ovat epästabiileja.



Esimerkki 4.1. Tarkastellaan autonomista paria

$$\begin{cases} \dot{x} = x\, g(\sqrt{x^2+y^2}) - y \\ \dot{y} = x + y\, g(\sqrt{x^2+y^2}) \end{cases} \qquad (4.5)$$

jossa funktio $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ on lokaalisti Lipschitz, erityisesti jatkuva. Pari voidaan kirjoittaa napakoordinaateissa muotoon

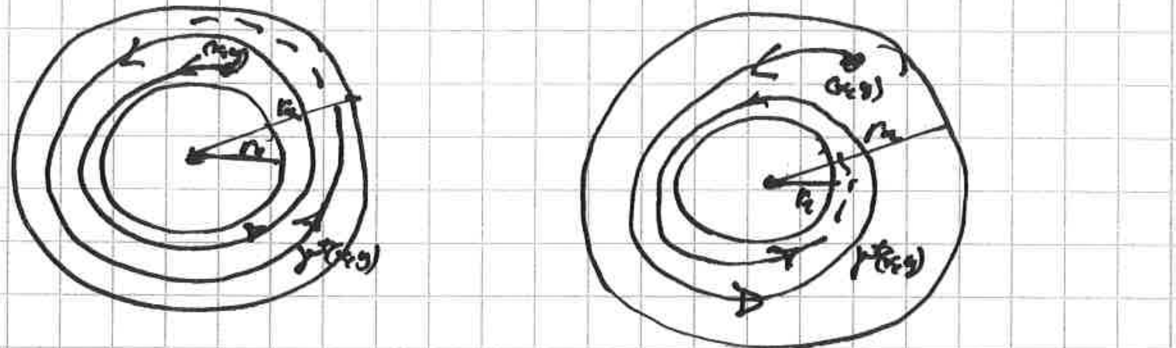
$$\dot{\phi} = 1, \quad \dot{r} = r\, g(r). \qquad (4.6)$$

Origo on parin (4.5) ainoa kriittinen piste. Kuitenkin pätee (4.6), joten suljetut radat ovat ympyrät $r(t) \equiv$ funktion g nollakohta, $\phi(t) = t + c$, mikä seuraa väliarvolauseesta, sillä eli $r(t) > 0$ (paitsi kriittisessä pisteessä $r(t) \equiv 0$). Ne ovat siis periodisia ratkaisuja

Olkoot $0<r_1<r_2$ kaksi peräkkäistä g:n nollakohtaa, ja olkoon $r(0)\in\,]r_1,r_2[$. Tällöin $r(t)\in\,]r_1,r_2[$ kaikilla $t\in\mathbb{R}$ ($\Delta=\mathbb{R}$ seuraa jatkamislauseesta).

— Jos $g(r)>0$, $r\in\,]r_1,r_2[$, niin $r(t)$ on aidosti kasvava.

— Jos $g(r)<0$, $r\in\,]r_1,r_2[$, niin $r(t)$ on aidosti vähenevä.



Kun $\|z\|\in\,]r_1,r_2[$, $z=(x,y)$, Poincarén-Bendixsonin lauseen nojalla rajajoukko $\omega(z)$ on periodinen rata, edellisessä tapauksessa ulkoympyrä $\omega(z)=\{w \mid \|w\|=r_2\}$, jälkimmäisessä sisäympyrä $\omega(z)=\{w \mid \|w\|=r_1\}$; asia nähtäisiin melko helposti suoraankin ilman tätä lausetta, käyttämällä sen sijaan lausetta 1.4.

Tällaista toisistaan eristettyjä periodisia ratoja kutsutaan rajasykleiksi. Jos esimerkissä 4.1 valitaan $g(r)=e^{-1/r^2}\sin(1/r)$, näitä rajasyklejä on ääretön määrä kasautuen origoon. Hilbertin 16. ongelma kuuluu: Kuinka monta rajasykliä voi olla parilla

$$\begin{cases}\dot{x} = p_n(x,y)\\ \dot{y} = q_n(x,y)\end{cases} \qquad (4.7)$$

jossa p_n ja q_n ovat korkeintaan astetta n olevia polynomeja? Mikä on niiden asema toistensa nähden? Dulac todisti 1934 että parilla (4.7) voi olla rajasyklejä vain äärellinen määrä. (92) Sen sijaan "tavallisia" periodisia ratkaisuja sillä voi olla kyllähän ääretön määrä, esimerkiksi käy Lotkan ja Volterran peto-saalismalli.

Esimerkki 4.2. Tarkastellaan paria

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -x^3 - (4x^2+y^2-4)y \end{aligned} \qquad (4\text{-}8)$$

ja osoitetaan että sillä on periodisia ratkaisuja.

Origo on parin ainoa kriittinen piste. Pakotetaan ratkaisujen kulkua kuvan [illegible] tyyliin Lyapunovin menetelmällä: etsitään positiivisesti definiitti funktio, joka toimii jossakin origon ympäristössä Lyapunovin työntö-funktiona, mutta kauempana origosta kuin Lyapunovin (veto)funktio. Kokeillaan yritettä

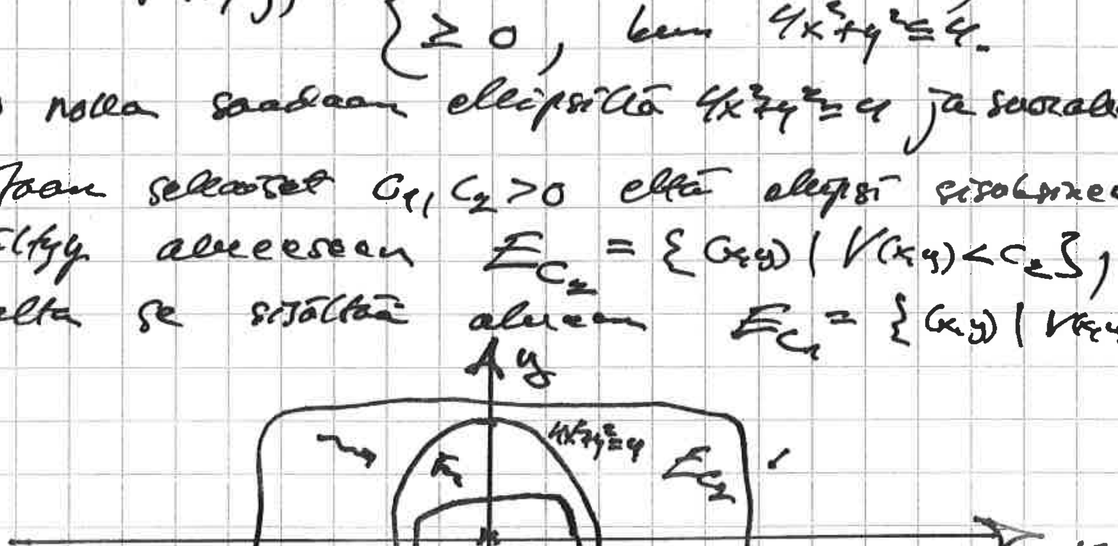
$$V(x,y) = x^4/4 + y^2/2. \quad \text{Tällöin}$$

$$\dot{V}(x,y) = \frac{\partial V}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial V}{\partial y}\dot{y} = x^3y - x^3y - (4x^2+y^2-4)y^2 = -(4x^2+y^2-4)y^2,$$

joten $\dot{V}(x,y) = \begin{cases} \le 0, & \text{kun } 4x^2+y^2 \ge 4, \\ \ge 0, & \text{kun } 4x^2+y^2 \le 4. \end{cases}$

Arvo nolla saadaan ellipsillä $4x^2+y^2=4$ ja suoralla $y=0$.

Valitaan sellaiset $c_1, c_2 > 0$ että ellipsi sisältyy alueeseen $E_{c_2} = \{(x,y) \mid V(x,y) < c_2\}$, ja toisaalta se sisältää alueen $E_{c_1} = \{(x,y) \mid V(x,y) < c_1\}$



Rengas $K = \bar{E}_{c_2} \setminus E_{c_1}$ on kompakti, ja se todetaan positiivisesti invariantiksi lauseessa useasti käytetyllä päättelyllä. Siten, jos $z=(x,y)\in K$, niin $\gamma^+(z)\subset K$ ja $\omega(z)\subset K$.

Huom. Tähän ei sovellu aiemman suoraan lause 1-1, miksi?

Koska nyt ainoa kriittinen piste $\bar{0}$ ei ole K:ssa, Poincarén–Bendixsonin lauseen nojalla rajajoukko $\omega(z)$ on periodinen rata. Koska nähdään että se välttämättä kiertää origon, seuraa väitteemme lauseesta 4.2.

Huom. Ei ole käsillä syytä, miksei näitä periodisia ratoja olisi useampiakin, erilaisina rajajoukkoina $\omega(z)\subset K$, $z\in K$. Mikään niistä ei ole kuitenkaan ellipsi $4x^2+y^2=4$, jota kyllä aina kosketaan. Nimittäin $\omega(z)=\gamma(w)$ jollakin $w\in\omega(z)$, mutta ellipsi ei ole ratkaisurata.

Lisäksi tasapainotila $\bar{0}$ on epästabiili, minkä todetaan todistamatta tai käyttämällä lauseen 3-3 yleistystä, versiota joka on vastine lauseelle 3-2 (ks. harjoitukset); ellipsin sisällä $\dot{V}$ on positiivisesti aidosti semidefiniitti. Toisaalta myöskään lause 3-10 ei toimi tässä, sillä linearisoinnin matriisin ominaisarvot ovat 0 ja 4.

Periodinen rata on Jordanin käyrä. Käyrälauseen mukaan kyseinen käyrä rajoittaa sisäänsä rajoitetun, yhdesti yhtenäisen alueen ja on samalla tämän alueen, kuten myös ulkopuolelle jäävän alueen, reuna $\mathbb{R}^2$:ssa.

Seuraava lause todistetaan usein nk. pisteen indeksiteorian avulla (ks. Jordan & Smith: luku 3); tässä annetaan kuitenkin Eero Saksmanin ideoima suora todistus.

Lause 4.2. Olkoon tarkasteltavan autonomisen systeemin (1.1) dimensio $n=2$. Olkoon $x \in D$ periodinen piste, jonka määrittelemän periodisen radan $\gamma(x)$ sisäänsä rajoittama alue Ω kokonaisuudessaan sisältyy joukkoon D. Tällöin Ω sisältää ainakin yhden kriittisen pisteen.

Tod. VO: $f(y) \neq \bar{0}$ kaikilla $y \in \Omega$. Koska periodinen rata ei sisällä kriittisiä pisteitä, niin $f(y) \neq \bar{0}$ myös kun $y \in \partial\Omega = \gamma(x)$. Koska f on jatkuva ja $\bar{\Omega} = \Omega \cup \gamma(x)$ on kompakti, Heine-Borelin nojalla löytyy sellainen vakio $m > 0$ että

$$\|f(y)\| \geq m \text{ kaikilla } y \in \bar{\Omega}. \quad (4.9)$$

Ratkaisun yksikäsitteisyydestä seuraa että jos $y \in \Omega$, niin $t \cdot y \in \Omega$ kaikilla $t \in \Delta(y)$, Poistumislauseesta että $\Delta(y) = \mathbb{R}$. Luonnollisesti, myös kun $y \in \partial\Omega = \gamma(x)$, niin $t \cdot y \in \partial\Omega$ kaikilla $t \in \Delta(y) = \mathbb{R}$.

Tarkastellaan kuvausta

$$g : \bar{\Omega} \to \bar{\Omega}, \quad g(y) = t \cdot y, \quad (4.10)$$

sopivalla vakion $t > 0$ arvolla. Edellä esitetyn nojalla se on hyvin määritelty. Lauseen 1.3 nojalla se on jatkuva kuvaus. Valitaan t niin pieneksi että

$$\|(f_1(\xi \cdot y), f_2(\eta \cdot y)) - f(y)\| \leq m/2 \quad (4.11)$$

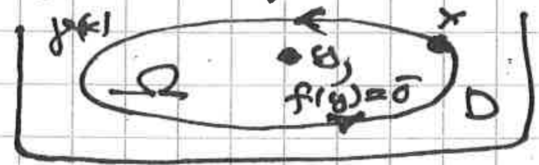
kaikilla $0 \leq \xi, \eta \leq t$ ja $y \in \bar{\Omega}$. Tämä on mahdollista, koska $\xi \cdot y, \eta \cdot y \in \bar{\Omega}$ ja virtauskuvaus $\phi(s,y) = s \cdot y$ sekä f ovat jatkuvia, siis tasaisesti jatkuvia kompaktissa joukoissa $[0,t] \times \bar{\Omega}$ sekä $\bar{\Omega}$. Tällöin väliarvolauseen nojalla

$$\|g(y) - y\| = \|t \cdot y - y\| = \|y(t) - y(0)\| = \|(\dot{y}_1(\xi)t, \dot{y}_2(\eta)t)\| = \|(f_1(y(\xi))t, f_2(y(\eta))t)\|$$

$= t\|(f_1(\xi\cdot y), f_2(\eta\cdot y))\| \overset{(4.9),(4.11)}{\geq} \frac{m}{2} t > 0$ kaikilla $y \in \overline{\Omega}$,

joten
$$g(y) \neq y \text{ kaikilla } y \in \overline{\Omega}. \quad (4.12)$$

Riemannin kuvauslauseen nojalla on olemassa homeomorfinen, paloittain konformikuvaus
$$h: \overline{\Omega} \to \overline{B}(\bar{0},1).$$
Saadaan jatkuva kuvaus
$$l = h \circ g \circ h^{-1}: \overline{B}(\bar{0},1) \to \overline{B}(\bar{0},1),$$
jolla tuloksen (4.12) nojalla ei ole kiintopisteitä, siis $l(z) \neq z$ kaikilla $z \in \overline{B}(\bar{0},1)$. Tämä on kuitenkin ristiriidassa Brouwerin kiintopistelauseen kanssa. Siten $f(y) = \bar{0}$ jossakin $y \in \Omega$. □



Seuraavassa saadaan seuraava yhtälöparin juurta koskeva mielenkiintoinen tulos:

Seuraus 4.3. Olkoon kuvaus $f = (f_1, f_2): D \to \mathbb{R}^2$ lokaalisti Lipschitz alueessa $D \subset \mathbb{R}^2$. Tarkastellaan pisteeseen $x \in D$ ja systeemiin (7.1) liittyvää ratkaisurataa merkitään $\gamma(x)$, positiivista suuntaa $\gamma^+(x)$.

Oletetaan, että löytyy sellainen yhdesti yhtenäinen alue $G \subset D$ ja siinä piste x, että niille pätee:
$$cl_D(\gamma^+(x)) \subset G \text{ ja } cl_D(\gamma^+(x)) \text{ on kompakti.}$$
Tällöin yhtälöparilla
$$f(x,y) = \bar{0} \iff f_1(x,y) = f_2(x,y) = 0 \quad (4.13)$$
on ainakin yksi juuri alueessa G.

Tod. Olkoon $x \in G$ kuten lauseessa. Pätee $\omega(x) \subset cl_D(\gamma^+(x)) \subset G$. Poincarén-Bendixsonin lauseen nojalla joko
(1) $\omega(x)$ sisältää kriittisen pisteen. Tällöin se on (4.13):n juuri.
tai (2) $\omega(x)$ on periodinen rata. Tällöin $\omega(x)$:n sisäänsä rajoittama alue, ja siten G, sisältää lauseen 4.2 nojalla kriittisen pisteen. □

Huom. Tällaisen alueen G löytämisessä Lause 1.1 voi olla hyödyksi.

Lause 4.4 (Bendixsonin kieltävä kriteeri).

Olkoon tarkasteltavan autonomisen systeemin (1.1) dimensio $n=2$. Olkoon $G \subset D$ yhdesti yhtenäinen alue, $f \in C^1(G,\mathbb{R}^2)$ ja $u \in C^1(G,\mathbb{R})$. Oletetaan että funktio $\nabla\cdot(uf): G \to \mathbb{R}$ säilyttää merkkinsä alueessa G ja että sen nollakohdat muodostavat nollamittaisen joukon. Tällöin alueessa G ei ole suljettuja ratoja.

Tod.: VO: Olkoon $\Gamma = \gamma(x)$ suljettu rata G:ssä, jolloin se on Jordanin käyrä, ja olkoon Ω sen sisäänsä rajoittama alue. Koska G on yhdesti yhtenäinen, niin $\Omega \subset G$. Pisteessä $y = x(t) \in \Gamma$ käyrän Γ normitetulle ulkonormaalille $n(y)$ pätee – $\dot{x}(t) = f(x(t)) \neq \bar{0}$ –

$$n(y) = (\dot{x}_2(t), -\dot{x}_1(t)) \,/\, \|\dot{x}(t)\|.$$

Voidaan olettaa että $\nabla\cdot(uf) > 0$ melkein kaikkialla G:ssä. Gaussin divergenssilauseen nojalla pätee

$$0 < \int_\Omega \nabla\cdot(uf)\,dz = \oint_\Gamma (uf)\cdot n(y)\,ds(y) = \int_0^T (uf)(x(t))\cdot (\dot{x}_2(t), -\dot{x}_1(t))\,dt = \int_0^T u(x(t))\big(\underbrace{\dot{x}(t)\cdot(\dot{x}_2(t), -\dot{x}_1(t))}_{=0}\big)\,dt = 0,$$

jossa $ds(y) = \|\dot{x}(t)\|\,dt$ ja T on ratkaisun $x(t) = t\cdot x$ perioodi. Saatu ristiriita osoittaa väitteen todeksi. □

Esimerkki 4.3 Tarkastellaan autonomista paria

$$\begin{cases} \dot{x} = a(y)x + b(y) \\ \dot{y} = c(x)y + d(x), \end{cases} \qquad (4.14)$$

jossa kerroinfunktiot a, b, c ja d ovat jatkuvasti derivoituvia, ja a sekä c lisäksi joko positiivisia tai negatiivisia alueessa G, joka oletetaan olevan yhdesti yhtenäinen. Tällöin $\nabla\cdot f(x,y) = a(y) + c(x) \gtrless 0$ kaikilla $(x,y) \in G$. Valitaan $u \equiv 1$. Lauseen 4.4 nojalla parilla (4.14) ei ole periodisia ratkaisuja alueessa G.

V. Ljapunovin epäautonominen teoria

Tässä luvussa tarkastellaan n-dimensionaalista normaalimuotoista 1. kl. systeemiä

$$\dot{x} = f(t,x), \qquad (5.1)$$

jonka määrittelevä funktio f riippuu eksplisiittisesti vapaasta muuttujasta t. Pitäen silmällä OE-lauseita (olemassaolo- ja jatkamislauseita) oletetaan että f on jatkuva ja lokaalisti tasaisesti Lipschitz-jatkuva muuttujan x suhteen (ainakin riittää jatkuvat osittaisderivaatat x:n komponenteissa) (t,x)-avaruuden $\mathbb{R}^{n+1}$ alueessa D, joka sisältää joukon (puolisuoran)

$$H = \{(t,\bar{0}) \mid t \geq 0\}. \qquad (5.2)$$

Lisäksi oletetaan että

$$f(t,\bar{0}) = \bar{0} \quad \text{kaikilla } t \geq 0, \qquad (5.3)$$

jolloin vakiofunktio $x(t) \equiv \bar{0}$ on systeemin (5.1) ratkaisu, ainakin pisteissä $t \geq 0$. Tarkoitus on tutkia tämän ratkaisun stabiilisuutta.

Heti alkuun on syytä huomata, että minkä tahansa ratkaisun stabiilisuustarkastelussa voidaan siirtyä vakiofunktioon $x(t) \equiv \bar{0}$. Nimittäin, jos $y_0(t)$ on systeemin $\dot{y} = h(t,y)$ ratkaisu välillä $t \geq 0$ (ja h:lla yllä luetellut säännöllisyysominaisuudet), niin muunnoksella

$$x(t) = y(t) - y_0(t) \qquad (5.4)$$

saadaan yhtäpitävä systeemi

$$\dot{x} = \dot{y} - \dot{y}_0 = h(t,y) - h(t,y_0) = h(t, x+y_0(t)) - h(t, y_0(t)) \overset{def}{=} f(t,x),$$

jolla on vakioratkaisu $x(t) \equiv \bar{0}$, $t \geq 0$, ja tämän stabiilisuusominaisuudet ovat selvästi täsmälleen samat kuin ratkaisun $y_0(t)$ ovat alkuperäisessä systeemissä. Jatkossa siis oletamme (5.1–3).

Koska systeemi (5.1) riippuu myös t:stä, Ljapunovin funktio tulee riippumaan yleensä siitä. Jatkossa reaaliarvoinen funktio $V = V(t,x)$ oletetaan jatkuvasti derivoituvaksi, myös t:n suhteen, jossain (t,x)-avaruuden $\mathbb{R}^{n+1}$ alueessa, joka sisältyy alueeseen D ja sisältää vähintään puolisuoran H.

Määritelmä 5.1. Olkoon Ω origin sisältävä x-avaruuden $\mathbb{R}^n$ alue. Reaaliarvoinen funktio $V = V(t,x)$ on *positiivisesti definiitti* joukossa $[0,\infty[\times \Omega$, jos on olemassa sellainen jatkuva, alueessa Ω positiivisesti definiitti funktio $\tilde{V} = \tilde{V}(x) : \Omega \to \mathbb{R}$ (määritelmä 3.1), siis t:stä riippumaton, että

$$V(t,x) \geq \tilde{V}(x) \quad \text{kaikilla } (t,x) \in [0,\infty[\times \Omega. \qquad (5.5)$$

Negatiivisesti definiitti ja semidefiniitti määritellään vastaavalla tavalla; erityisesti $V(t,x)$ on negatiivisesti definiitti, jos $-V(t,x)$ on sitä positiivisesti.

Huom. $H \subset [0,\infty[\times \Omega$.

Esimerkki 5.1. Olkoon $n = 2$ ja

$$V(t,x) = x_1^2 + (1+t)x_2^2 \geq x_1^2 + x_2^2 = \tilde{V}(x) \quad \text{kaik. } (t,x) \in [0,\infty[\times \mathbb{R}^2.$$

Koska $\tilde{V}$ on positiivisesti definiitti alueessa $\Omega = \mathbb{R}^2$, funktio V on sitä joukossa $[0,\infty[\times \mathbb{R}^2$.

Esimerkki 5.2. Olkoon $n=2$ ja

$$V(t,x) = x_1^2 + x_2^2/(1+t).$$

Koska $V(t,0,x_2) = \frac{x_2^2}{1+t} \to 0$ kun $t \to \infty$, niin jos $V(t,x) \geq \tilde{V}(x) \geq 0$, niin $\tilde{V}(0,x_2) = 0$. Siis vaikka $V(t,x) > 0$ kun $x \neq \bar{0}$, funktio V ei ole positiivisesti definiitti missään joukossa $[0,\infty[\times \Omega$, jossa $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ on alue. Se on kylläkin positiivisesti semidefiniitti joukossa $[0,\infty[\times\mathbb{R}^2$ ($\tilde{V} \equiv 0$)

Määritelmä 5.2. Jatkuvasti derivoituvan funktion $V = V(t,x)$ derivaatta systeemin (5.1), $\dot{x} = f(t,x)$, $f = (f_1, \dots, f_n)$, suhteen on

$$\dot{V}(t,x) = \frac{\partial V}{\partial t}(t,x) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_k}(t,x) f_k(t,x). \quad (5.6)$$

Jos $x = x(t)$ on systeemin (5.1) ratkaisu, niin ketjusäännöstä välittömästi seuraa että

$$\dot{V}(t) = \frac{d}{dt} V(t,x(t)) = \dot{V}(t,x(t)). \quad (5.7)$$

Seuraavaa lausetta kannattaa verrata lauseen 3.2 kohtaan (a), todistuskin on niille sama.

Lause 5.1 (Ljapunovin lause). Systeemistä $\dot{x} = f(t,x)$ oletetaan kuten kohdissa (5.1–3). Olkoon Ω origon sisältävä $\mathbb{R}^n$:n alue.

Oletetaan että on alueessa sellainen jossain D:n osa-alueessa määritelty jatkuvasti derivoituva reaaliarvoinen funktio $V=V(t,x)$, että $V(0,\bar{0})=0$ ja se on positiivisesti definiitti joukossa $[0,\infty[\times\Omega$ ja sen derivaatta $\mathring{V}=\mathring{V}(t,x)$ kyseisen systeemin suhteen on puolestaan negatiivisesti semidefiniitti joukossa $[0,\infty[\times\Omega$. Tällöin systeemin vakioratkaisu $x(t)\equiv\bar{0}$, $t\geq 0$, on stabiili.

Tod. Kuten sanottu, miltei sama kuin lauseen 3.2 kohdassa (a): Sovelletaan lemmaa 3.1 positiivisesti definiittiin funktioon $\tilde{V}:\Omega\to\mathbb{R}$. Valitaan $\bar{B}(\bar{0},r)\subset\Omega$, kontrolloituun $\varepsilon>0$, sitä vastaten lemman $\tilde{V}$:lle antama c_ε ja viimein sellainen $\delta=\delta_\varepsilon>0$ että $V(0,x(0))<c_\varepsilon/2$, kun $x(0)\in B(\bar{0},\delta)$. Tämä viimeinen on mahdollista koska $V(0,\bar{0})=0$.

Alkuehtoa vastaava ratkaisu olkoon $x=x(t)$. Siihen liittyvälle derivaatalle pätee $\mathring{V}(t)=\mathring{V}(t,x(t))\leq 0$, mutta, jos $x(t)$ ei pysyisi kuulassa $B(\bar{0},\varepsilon)$, niin jollakin $t_1>0$ pätisi $V(t_1,x(t_1))\geq\tilde{V}(x(t_1))\geq c_\varepsilon$, mikä ristiriidassa vähenevyyden kanssa.

Koska $x(t)\in B(\bar{0},\varepsilon)$ kaikilla $t\in[0,t^+[$, Poistumislauseen yleisestä muodosta seuraa erityisesti että $t^+=\infty$, siis ratkaisu olemassa kaikissa pisteissä $t\geq 0$ (ks. kurssi Differentiaaliyhtälöt I; kyseisen lauseen todistus ei liioin poikkea tässä kurssissa esitetyn erikoistapauksen todistuksesta). $\square$

Esimerkki 5.3. Tarkastellaan skalaariyhtälön $\ddot{u} + a(t)u = 0$ ratkaisua $u(t) \equiv 0$. Oletetaan että $a(t) \geq a > 0$ ja $\dot{a}(t) \leq 0$ kaikilla $t \geq 0$, ja että derivaatta $\dot{a}$ on jatkuva.

Standardimuunnoksella $x(t) = u(t)$, $y(t) = \dot{u}(t)$ saadaan 1.kl.-pari

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -a(t)x \end{cases} \qquad (5.8)$$

jolla on ratkaisuna $\bar{0}$.

Kokeillaan Ljapunovin funktioksi yritettä

$$V(t, z) = a(t)x^2 + y^2, \quad z = (x, y),$$

joka on jatkuvasti derivoituva ja $V(0, \bar{0}) = 0$. Pätee $V(t, z) \geq ax^2 + y^2 = \tilde{V}(z)$ kaikilla $(t, z) \in [0, \infty[\times \mathbb{R}^2$, jossa $\tilde{V}$ on positiivisesti definiitti alueessa $\Omega = \mathbb{R}^2$. Siis V on positiivisesti definiitti joukossa $[0, \infty[\times \mathbb{R}^2$.

Lisäksi

$$\dot{V}(t, z) = \dot{a}(t)x^2 + 2a(t)xy - 2a(t)xy = \dot{a}(t)x^2 \leq 0 = \hat{V}(z)$$

kaikilla $(t, z) \in [0, \infty[\times \mathbb{R}^2$, joten $\dot{V}$ on negatiivisesti semidefiniitti tässä joukossa.

Lauseen 5.1 nojalla parin ratkaisu $z(t) \equiv \bar{0}$ on stabiili, ja niin on 0 alkuperäisessä skalaariyhtälössä.

Olkoon $z(t) = (x(t), y(t))$ parin ratkaisu. Koska siihen liittyen $\dot{v}(t) = \frac{d}{dt} V(t, z(t)) = \dot{V}(t, z(t)) \leq 0$, funktio $v(t) = V(t, z(t))$ on vähenevä ja siten

$$ax(t)^2 + y(t)^2 \leq a(t)x(t)^2 + y(t)^2 = V(t, z(t)) \leq V(0, z(0)) \leq a(0)x(0)^2 + y(0)^2.$$

Siis jokainen ratkaisu $z(t)$ (jonka alkuarvo on annettu pisteessä 0) on rajoitettu funktio, ts. sen kuvajoukko $\{z(t) \mid t \geq 0\}$ on rajoitettu. Siten Poistumislauseen nojalla se on erityisesti olemassa kaikissa pisteissä $t \geq 0$ (mikä kyllä seuraa lineaarisuudesta).

Lauseen 3.2 kohdalle (b) saadaan rajoitetusti vastine, silloin kun Lyapunovin funktio on "vahva" (kuten kohdan (b) lopussa), siis kun derivaatta on peräti negatiivisesti definiitti. Tämäkin kriteerin vaatii olettaa lisää.

Määritelmä 5.3. Reaaliarvoisella funktiolla $V = V(t,x)$ (kuten määritelmässä 5.1) on infinitesimaalinen yläraja, jos jokaista $\varepsilon > 0$ kohti löytyy sellainen $\delta = \delta_\varepsilon > 0$ että

$$|V(t,x)| < \varepsilon \text{ kaikilla } (t,x) \in \{(t,x) \mid t \geq 0, \|x\| < \delta\} = [0,\infty[\times B(\bar{0};\delta). \qquad (5.9)$$

Huom. Tällöin erityisesti $V(t,\bar{0}) = 0$ kaikilla $t \geq 0$.

Esimerkki 5.4. Funktio $V(t,x) = (1+t)x_1^2 + x_2^2$ on positiivisesti definiitti joukossa $[0,\infty[\times \mathbb{R}^2$, mutta sillä ei ole sellaista infinitesimaalista ylärajaa.

Sen sijaan funktio $V(t,x) = \frac{2+t}{1+t} x_1^2 + x_2^2$ on positiivisesti definiitti joukossa $[0,\infty[\times \mathbb{R}^2$ ja lisäksi sillä on infinitesimaalinen yläraja.

Lause 5.2 (Lyapunovin lause). Samat oletukset kuin lauseessa 5.1 ja lisäksi oletetaan että funktiolla $V = V(t,x)$ on infinitesimaalinen yläraja ja että sen derivaatta $\mathring{V} = \mathring{V}(t,x)$ on peräti negatiivisesti definiitti joukossa $[0,\infty[\times \Omega$. Tällöin systeemin vakioratkaisu $x(t) \equiv \bar{0}$, $t \geq 0$, on asymptoottisesti stabiili.

Tod. Lauseen 5.1 nojalla ratkaisu $x(t) \equiv \bar{0}$ on stabiili. Olkoot $\varepsilon > 0$ ja $\delta = \delta_\varepsilon > 0$ kuten edellä, ja olkoon $x(0) \in B(\bar{0};\delta)$ ja

$x(t)$ alkuehtoa vastaava systeemin ratkaisu; toteuttaa siis $x(t) \in B(\bar{0}, \varepsilon)$ kaikilla $t \geq 0$.

Oletetaan että funktiolla $V(t, x(t))$ on raja-arvo V_∞ kun $t \to \infty$, ja osoitetaan ~~ett~~ epäsuorasti että $V_\infty = 0$. Tässä oletamme lisäksi infinitesimaalisen ylärajan ja derivaatan negatiivisen definiittisyys, ts. $\dot{V}(t,x) \leq \hat{V}(x)$, jossa $\hat{V}$ on jatkuva, alueessa Ω negatiivisesti definiitti funktio.

Lopuksi sovelletaan lemmaa 3.1, sen Lyapunov-funktioon $\tilde{V} = \hat{V}(x)$, joka on positiivisesti definiitti. □

Harj. Esitä lauseen 5.2 todistus yksityiskohtaisemmin.

Esimerkki 5.5. Tarkastellaan paria

$$\begin{cases} \dot{x} = -a(t)x - by \\ \dot{y} = bx - c(t)y \end{cases}, \quad z = (x, y), \tag{5.6}$$

jossa $b \in \mathbb{R}$ on vakio ja a sekä c ovat jatkuvia funktioita joille

$$a(t),\ c(t) \geq \alpha > 0 \quad \text{kaikilla } t \geq 0.$$

Parilla on selvästi ratkaisuna $z(t) \equiv \bar{0}$; tutkitaan sen stabiilisuutta.

Kokeillaan "luonnollista" Lyapunovin funktioehdokasta $V(t,z) = x^2 + y^2$, joka on positiivisesti definiitti joukossa $[0, \infty[\times \mathbb{R}^2$ ja sillä on lisäksi infinitesimaalinen yläraja.

Lisäksi $\dot{V}(t,z) = 2x(-a(t)x - by) + 2y(bx - c(t)y) = -2a(t)x^2 - 2c(t)y^2 \leq -2\alpha(x^2 + y^2) = \hat{V}(z)$ kaikilla $(t,z) \in [0, \infty[\times \mathbb{R}^2$, ja funktio $\hat{V}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ on negatiivisesti definiitti alueessa $\Omega = \mathbb{R}^2$. Siten $\dot{V}$ on negatiivisesti definiitti joukossa $[0, \infty[\times \mathbb{R}^2$, ja lauseen 5.2 nojalla ratkaisu $z(t) \equiv \bar{0}$ on asymptoottisesti stabiili.

Lopuksi esitetään eräs tie siirtää syvempää autonomista teoriaa ja tuloksia epäautonomisiin systeemeihin, nimittäin lause 3.1 ja sen seuraukset, lause 3.7 sekä lauseen 3.2 kohta (b) vaativimmalta osaltaan, nojaavat vahvasti autonomisuuteen, erityisesti lauseeseen 1.4, eivätkä ~~ole~~ niin vain omaa vastinetta epäautonomisissa systeemeissä. Tämä tie kulkee autonomisen rajasysteemin kautta.

<u>Määritelmä 5.4.</u> Olkoon Ω alue x-avaruudessa $\mathbb{R}^n$, funktio $h=h(x)$ lokaalisti Lipschitz siinä ja funktio $f=f(t,x)$ jatkuva sekä lokaalisti tasaisesti Lipschitz x:n suhteen joukon $[0,\infty[\times\Omega$ ympäristössä, ts. $[0,\infty[\times\Omega \subset D$. Olkoon N alueen Ω suljettu osajoukko.

Systeemi $$\dot{x}=f(t,x),\quad (t,x)\in D, \qquad (5.11)$$

on <u>asymptoottisesti autonominen</u> joukossa N, jos

(1) $\lim_{t\to\infty} f(t,x)=h(x)$ kaikilla $x\in N$ ja tämä suppeneminen on tasaista x:n suhteen jokaisessa N:n kompaktissa osajoukossa,

(2) jokaista $\varepsilon>0$ ja $x\in N$ kohti löytyy sellainen $\delta=\delta(\varepsilon,x)>0$ että kun $\|x-y\|<\delta$, niin
$$\|f(t,x)-f(t,y)\|<\varepsilon \quad \text{kaikilla } t\geq 0. \qquad (5.12)$$

Tällöin autonomista systeemiä
$$\dot{x}=h(x),\quad x\in\Omega, \qquad (5.13)$$
kutsutaan systeemin (5.11) <u>autonomiseksi rajasysteemiksi</u>.

<u>Esimerkki 5.6.</u> Tarkastellaan dimensiossa $n=1$ yhtälöä
$$\dot{x}=-\left(1+\frac{1}{1+t}\right)x^2,\quad t\geq 0. \qquad (5.14)$$

yhtälö on asymptoottisesti autonominen joukossa

$$N = \Omega = \mathbb{R},$$

sillä

(1) $\lim_{t\to\infty}\left[-\left(\left(1+\frac{1}{1+t}\right)x^2\right)\right] = -x^2 = h(x)$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$, ja suppeneminen on tasaista $\mathbb{R}$:n kompaktissa osajoukossa ja

(2) $|f(t,x)-f(t,y)| = \left(1+\frac{1}{1+t}\right)|x^2-y^2| \le 2|x^2-y^2| = 2|x+y||x-y|$ kaikilla $t \ge 0$, joten vaadittava $\delta(\varepsilon,x) > 0$ löytyy helposti.

Autonominen rajasysteemi on $\dot{x} = -x^2$, $x \in \mathbb{R}$.

Seuraava lause on luonteeltaan vastaava lauseen 3.7.

<u>Lause 5.3.</u> Olkoon Ω alue x-avaruudessa $\mathbb{R}^n$ ja $[0,\infty[\times\Omega \subset D$. Systeemin (5.11) määrittelevästä funktiosta $f = f(t,x)$ oletetaan tavallisten säännöllisyyden lisäksi että se on rajoitettu joukossa $[0,\infty[\times K$, kun K on alueen Ω kompakti osajoukko.

Oletetaan että on olemassa sellainen jatkuvasti derivoituva, einegatiivinen reaalifunktio $V = V(t,x)$, Ljapunovin funktio, että sen systeemin (5.11) liittyvä derivaatta $\dot{V} = \dot{V}(t,x)$ on negatiivisesti semidefiniitti joukossa $[0,\infty[\times\Omega$, ts. siinä kaikilla pisteillä (t,x) pätee

$$\dot{V}(t,x) \le \hat{V}(x)$$

ja funktio $\hat{V} = \hat{V}(x)$ on negatiivisesti semidefiniitti alueessa Ω. Määritellään

$$N = \{x \in \Omega \mid \hat{V}(x) = 0\}. \qquad (5.15)$$

Oletetaan vielä että systeemi (5.11) on asymptoottisesti autonominen joukossa N rajasysteeminään (5.13). Olkoon M suurin N:n osajoukko, joka on positiivisesti invariantti systeemin (5.13) suhteen.

Tällöin, jos systeemin (5.11) ratkaisu $x = x(t)$ on rajoitettu mielessä, että sen kuvajoukon $\{x(t) \mid t \geq 0\}$ sulkeuma on kompakti ja sisältyy alueeseen Ω, niin ratkaisu on olemassa kaikilla $t \geq 0$ ja

$$x(t) \to M \text{ kun } t \to \infty. \qquad (5\text{-}16)$$

Tod. Melko pitkä ja vaatii lemman kohtaista, jota ei ole kirjanmukaisesti annettu tässä kurssissa. Keskeistä kohta: Myös epäautonomisen systeemin rajoitetulla ratkaisulla $x = x(t)$ on positiivisessa suunnassa rajajoukko $\omega(x) \neq \emptyset$ ja $x(t) \to \omega(x)$ (vrt. lauseen 4.4 todistus). Melko helposti näytetään että lauseen oletuksilla $x(t) \to N$. Sitten erityisesti $\omega(x) \subset N$, ja juuri tästä syystä asymptoottinen autonomisuus joukossa N riittää.

Yksityiskohdat ja muuta asiaan liittyvää löytyy kirjasta Taro Yoshizawa: Stability Theory by Liapunov's Second Method, Math. Soc. of Japan, 1966, luku 3, erityisesti lause 14.2. $\square$

Esimerkki 5.7. Tarkastellaan paria (parametrisesti aikariippuvaa värähtelijää)

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x - a(t)y \end{cases}, \quad z = (x, y), \qquad (5.17)$$

ja sen vakioratkaisua $z(t) = (x(t), y(t)) \equiv \bar{0}$, $t \geq 0$. Oletetaan funktio $a(t)$ jatkuvaksi ja rajoitetuksi välillä $[0, \infty[$, ja päteköön lisäksi $a(t) \geq a > 0$ kaikilla $t \geq 0$.

Kokeillaan Lyapunovin funktioksi jälleen yritettä $V(t, z) = x^2 + y^2$, joka on positiivisesti definiitti joukossa $[0, \infty[\times \mathbb{R}^2$ (ja omaa kyllä infinitesimaalisen ylärajan). Siis $\Omega = \mathbb{R}^2$. Lisäksi

$$\mathring{V}(t, z) = 2xy - 2y(x + a(t)y) = -2a(t)y^2 \leq -2ay^2 = \tilde{V}(z) \leq 0$$

kaikilla $(t,z) \in [0,\infty[\times\mathbb{R}^2$, joten $\mathring{V}$ on koko joukossa negatiivisesti semidefiniitti. Lauseen 5.1 nojalla tasapainoasema $\bar{0}$ on stabiili.

Lause 5.2 ei ole nyt käytettävissä, koska derivaatta $\mathring{V}$ ei ole definiitti vaan vain semidefiniitti; Lause 5.3 kuitenkin on: selvästi $f(t,z)$ on rajoitettu joukossa $[0,\infty[\times K$, kun $K\subset\mathbb{R}^2$ on kompakti, sillä $a(t)$ on rajoitettu. Lisäksi

$$N = \{z\in\mathbb{R}^2 \mid \mathring{V}(z) = -2ay^2 = 0\} = \{(x,0)\mid x\in\mathbb{R}\},$$

ja pari (5.14) on asymptoottisesti autonominen joukossa N rajasysteeminään (määritelmän 5.4 ehdot (1-2) kyllä toteutuvat)

$$\begin{cases}\mathring{x}=0\\ \mathring{y}=-x\,.\end{cases}$$

Tämän systeemin suhteen N:n ainoa prs. invariantti osajoukko on selvästi $\{\bar{0}\}$.

Koska ratkaisu $\bar{0}$ on stabiili, ainakin jonkin origon ympäristöstä alkavat (5.14):n ratkaisut $z=z(t)$ ovat rajoitettuja. Lauseen 5.3 nojalla näille pätee $z(t)\to\bar{0}$ kun $t\to\infty$. Siten ratkaisun $\bar{0}$ stabiilisuus on asymptoottista.

Itse asiassa parin (5.14) kaikki ratkaisut $z=z(t)$ ovat rajoitettuja; nimittäin koska $\mathring{V}(t) = \mathring{V}(t,z(t)) \le 0$ kaikilla $t\ge 0$ (jolla olemassa), funktio $V(t)$ on vähenevä. Siten kaikilla $t\ge 0$ (jotka olemassa)

$$\|z(t)\|^2 = x(t)^2+y(t)^2 = V(t,z(t)) \le V(0,z(0)) = x(0)^2+y(0)^2.$$

Siis ratkaisu $z(t)$ on (jatkamislauseen nojalla) olemassa kaikilla $t\ge 0$ ja $z(t)\to\bar{0}$ kun $t\to\infty$.

* * * *