Autonomiset systeemit, 2015, harj. 9, ratkaisut (1)

1. Väite. Kun $k>0$, ratkaisu 0 on asympt. stabiili.

Tod. Sijoitus $x(t)=u(t)$, $y(t)=\dot{u}(t)$ palauttaa 1.kl. poruttn.

$$\begin{cases} \dot{x} = y & \\ \dot{y} = \ddot{u} = -\sin u - k\dot{u} = -\sin x - ky, \end{cases} = f(x,y)$$

jonka tasapainotila $\bar{0}$ on sama. Selvästi $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$. Linearisoidaan derivaattamatriisin avulla:

$$(Df)(x,y) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\cos x & -k \end{bmatrix}, \quad \text{erityisesti } A = (Df)(\bar{0}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -k \end{bmatrix},$$

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -k-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + k\lambda + 1 = 0 \iff \lambda = \frac{-k \pm \sqrt{k^2-4}}{2}$$

Koska $k>0$, ominaisarvojen reaaliosat (tai ne itse) ovat negatiiviset. Voidaan soveltaa Poincarén lausetta 3.9, jonka nojalla $\bar{0}$ on asympt. stabiili. $\square$

2. Väite. Tasapainotila $\bar{0}$ on asympt. stabiili kun $e<0$, ja se on epästabiili kun $0<e<2$ tai $e>2$.

Tod. Selvästi $f=(f_1,f_2) = (y, -x+e(1-x^2)y) \in C^1(\mathbb{R}^2)$. Linearisoidaan derivaattamatriisin avulla:

$$(Df)(x,y) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1-2exy & e(1-x^2) \end{bmatrix}, \quad \text{erityisesti}$$

$$A = (Df)(\bar{0}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & e \end{bmatrix}, \quad \det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & e-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$\lambda^2 - e\lambda + 1 = 0 \iff \lambda = \frac{e \pm \sqrt{e^2-4}}{2}.$$

Kun $e<0$, ominaisarvojen reaaliosat (tai ne itse) negatiiviset. Voidaan soveltaa Poincarén lausetta 3.9: sen nojalla $\bar{0}$ on asympt. stabiili.

Kun $0<e<2$, niin $\lambda_1,\lambda_2 \in \mathbb{C}$, ovat erit ja ~~$\lambda_1 \ldots$~~ $\mathrm{Re}(\lambda) = e/2 > 0$. Kun $e>2$, niin $\lambda_1,\lambda_2 \in \mathbb{R}$, ovat erit ja $\lambda_1 = \frac{e+\sqrt{\cdot}}{2} > 0$. Kummassakin tapauksessa voidaan

2
AS
kev. 9, 2014

Soveltaa lausetta 3.10, ja sen nojalla $\bar{0}$ on epästabiili. □

Parametrin arvo $e=0$ ei kuulu lauseiden 3.9 ja 3.10 piiriin, koska tällöin $\lambda = \pm i \in \mathbb{C}$ ja $Re(\lambda)=0$. Arvo $e=2$, koska tällöin $\lambda_{1,2}=1>0$ ja ominaisarvo on kaksinkertainen.

3. (a) Matriisin A ominaisarvojen täytyy olla eri, eli yksinkertaiset, koska lemmassa tämä oletetaan.

(b) Muutos on että lemmojen K kerrotaan vakiolla -1, tällöin neliömuodosta $V(x)=x^TKx$ tulee pos. definiitti ja derivaatasta $\dot{V}(x)$ neg. definiitti – merkitään edelleenkin V kuin ol.

4. Väite (lause 3.6). Olkoon tasapainotila $\bar{0}$ asympt. stabiili ja Ψ siihen liittyvä asympt. stabiilisuuden alue. Olkoon $x \in \Psi$ ja $x(t)=t\cdot x$ ratkaisu tämän pisteen kautta. Tällöin myös $x(t)$ on asympt. stabiili Lyapunovin (määritelmän 2.2) mielessä.

Tod. Osoitetaan ensin että $x(t)$ on Lyapunovin mielessä stabiili. Olkoon $\varepsilon>0$. Koska $\bar{0}$ on stabiili, löytyy sellainen $0<r\le\varepsilon$ että kaikilla $y\in B(\bar{0},2r)$ pätee $t^+(y)=\infty$ ja $\|t\cdot y\| = \|t\cdot y - t\cdot\bar{0}\| < \frac{\varepsilon}{2}$ kaikilla $t\geq 0$. (1)
Koska $x\in\Psi$, niin $t\cdot x\to\bar{0}$, joten löytyy sellainen $t_1>0$ että $\|t_1\cdot x\| = \|t_1\cdot x-\bar{0}\|<r$, ts. $t_1\cdot x\in B(\bar{0},r)$.
Lauseen 1.3 -virtauksen jatkuvuuden- nojalla löytyy sellainen $\delta>0$, että kaikilla $z\in B(x,\delta)$ pätee $z\in\Psi$ (tasainen jatkuvuus joukossa $[0,t_1]\times \bar{B}(\bar{0},\delta)$), erityisesti $t^+(z)=\infty$ ja
$\|t\cdot z - t\cdot x\|<r$ kaikilla $t\in[0,t_1]$;
erityisesti $t_1\cdot z\in B(\bar{0},2r)$. Siis, kun $z\in B(x,\delta)$,

niin $\|t\cdot z - t\cdot x\| < r \leq \varepsilon$ kaikilla $t \in [0, t_1]$

ja $\|t\cdot z - t\cdot x\| = \|S\cdot(t_1\cdot z) - S\cdot(t_1\cdot x)\| \leq \|S\cdot(t_1\cdot z)\| + \|S\cdot(t_1\cdot x)\| \overset{(1)}{<} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ kaikilla $s \geq 0$ eli $t \geq t_1$. Siten $\|t\cdot z - t\cdot x\| < \varepsilon$ kaikilla $t \in [0, \infty[$, joten $t\cdot x$ on stabiili rataan Ljapunovin mielessä. Lisäksi $\lim_{t\to\infty} \|t\cdot z - t\cdot x\| = \|\bar{0} - \bar{0}\| = 0$, joten $t\cdot x$:n stabiilisuus on asymptoottista. □

3
AS
harj. 9, 2011

5. (a) Väite. Kun $c > 0$ ja $-1 < d < 0$, alueet $D_{c,d}$ ovat pos. invarantteja joukkoja (3.18).

Tod. Jo esimerkissä 3.12 osoitettiin, että $V(x,y) = x^2 + y^2$ on aidosti (3.18):n vahva Ljapunovin funktio alueessa $\Omega = \{(x,y) \mid x > -1\}$.

Joukon $\bar{D}_{c,d} \subset \Omega$ reuna $\mathbb{R}^2$:ssa ja siten myös Ω:ssa koostuu ympyrän kaaresta $C = \{(x,y) \mid V(x,y) = x^2+y^2 = c, x > d\}$ ja janasta J jossa $x = d$. Reunan ulkonormaali $n(x,y)$ pätee

$n(x,y)\cdot f(x,y) = \nabla V \circ f(x,y) = \dot{V}(x,y) < 0$ kaikilla $(x,y) \in C$, sillä $\bar{D}_{c,d} \subset \Omega$, siis $C \subset \Omega$.

Janalla J puolestaan $n(x,y) = (-1, 0)$, joten

$n(x,y)\cdot f(x,y) = x(1+x) = d(1+d) < 0$ kaikilla $(x,y) \in J$. Voidaan siis soveltaa lausetta 7.1, ja saadaan, että $D_{c,d}$ on pos. invariantti. ☐

(b) Väite. $\Psi = \Omega$.

Tod. Koska V on vahva Ljapunovin funktio alueessa Ω, niin $N_\Omega = \{\bar{0}\}$. Lisäksi $\bar{D}_{c,d} \subset \Omega$ kun $-1 < d < 0$ ja $c > 0$, ja joukko $\bar{D}_{c,d}$ on kompakti. Siten joukkoon $K = \bar{D}_{c,d}$ voidaan soveltaa lausetta 3.1,

4
AS
kevät 9, 2015

Siltä kohdan (a) nojalla $D_{c,d}$ on positiivisesti invariantti: kun $z=(x,y)\in D_{c,d}$, niin $\gamma^+(z)\subset K = \overline{D}_{c,d}$. Lauseen 7.1 nojalla $\varphi_t z \to \bar{0}$, siis

$D_{c,d}\subset\Psi$. Siten $\Omega = \{(x,y) \mid x>-1\} = \bigcup_{\substack{c>0 \\ -1<d<0}} D_{c,d}\subset\Psi$.

Toisaalta pisteet $(-1,y)$, $y\in\mathbb{R}$, ovat kriittisiä, ne eivät kuulu joukkoon Ψ. Eikä myöskään pisteet (x,y), $x<-1$, koska ratkaisujen pisteet leikkaa suoraa $x=-1$. Siten $\Psi=\Omega$. $\square$

(c) Väite. Kriittiset pisteet $z=(-1,y)$, $y\in\mathbb{R}$, ovat epästabiileja.

Tod. Kohdan (b) nojalla jokaisesta kuulasta $B(z,\varepsilon)$, $\varepsilon>0$, löytyy piste $w\in\Psi$, jolle siis $\varphi_t w\to\bar{0}$. $\square$

Huom. Lause 3.10 ei toimi tässä, koska $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -3y & 0\end{bmatrix}$, $\lambda_1=0$, $\lambda_2=1$.