Autonomiset systeemit, 2015, harj. 8, ratkaisut. (1)

1. Väite. Tasapainotila $\bar{0}$ on asymptoottisesti stabiili.

Tod. Sovelletaan "Liénardin menettelyä":

(1) $f(x) = (x-1)^2 \geq 0$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$,

(2) $g(x) = \sin x$, joten $g(0) = 0$ ja $x\,g(x) = x \sin x > 0$ kaikilla $x \in]-\pi, \pi[\setminus \{0\}$; $G(x) = \int_0^x g(\xi)\,d\xi = \int_0^x \sin\xi\,d\xi = 1 - \cos x$.

$V(x,y) = G(x) + y^2/2 = 1 - \cos x + y^2/2$ on pos. definiitti (ainakin) alueessa $\Omega =]-\pi, \pi[\times \mathbb{R}$;

$\dot{V}(x,y) = (\sin x)y + y(-\sin x - (x-1)^2 y) = -(x-1)^2 y^2 \leq 0$ kaikilla $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Siten V on heikko Ljapunovin funktio alueessa Ω.

Lisäksi $N_\Omega = N_1 \cup N_2$, joissa $N_1 = \{(1,y) \mid y \in \mathbb{R}\}$ ja $N_2 = \{(x,0) \mid x \in]-\pi, \pi[\}$. Lauseen 3.2 ajatellen valitaan $r = \frac{1}{2}$, tällöin $\bar{B} = \bar{B}(\bar{0}, \frac{1}{2}) \subset \Omega$ ja $N_\Omega \cap \bar{B} = \{(x,0) \mid |x| \leq \frac{1}{2}\}$. Olkoon $z = (x,0)$ tämän (jälkimmäisen) joukon invariantin osajoukon piste ja $t \mapsto z = (x(t), y(t)) = (x(t), 0)$ ratkaisu z:n kautta. Tällöin $y(t) \equiv 0$, $\dot{y}(t) \equiv 0$, joten paria 2. yhtälön nojalla $\sin x(t) \equiv 0$, siis $x(t) \equiv 0$ sillä $x(t) \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$. Siis $z = \bar{0}$, ja siten ainoa invariantti osajoukko on $\{\bar{0}\}$. Lauseen 3.2 kohdan (6) nojalla $\bar{0}$ on asymptoottisesti stabiili. $\square$

Huom. Myös joukon N_Ω ainoa invariantti osajoukko on $\{\bar{0}\}$. Miksi?

2. Väite. Tasapainotila $\bar{0}$ on asymptoottisesti stabiili.

Tod. "Liénardin menettely", tässä vain x ja y ovat vaihtaneet paikkaa: (1) $f(y) = y^2 \geq 0$ kaikilla $y \in \mathbb{R}$,

(2) $g(y) = 6y^5$, joten $g(0) = 0$ ja $y\,g(y) = 6y^6 > 0$ kaikilla $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$;

$$G(y)=\int_0^y g(z)\,dz=\int_0^y 6z^5\,dz = y^6.$$

2 AS harj. 8, 2015

$V(x,y) = x^2/2 + G(y) = x^2/2 + y^6$ on pos. definiitti alueessa $\Omega = \mathbb{R}\times\mathbb{R} = \mathbb{R}^2$; $\dot V(x,y) = x(-xy^2-6y^5)+6y^5x = -x^2y^2 \le 0$ kaikilla $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Siten V on heikko Lyapunovin funktio alueessa $\Omega=\mathbb{R}^2$.

Lisäksi $N_\Omega = N_1 \cup N_2 = \{(0,y)\}\cup\{(x,0)\}$; olkoon $z=(0,y)$ joukon N_1 invariantin osajoukon piste ja $\ell - z = (x(t),y(t))=(0,y(t))$ ratkaisu sen kautta. Tällöin $x(t)\equiv 0$, $\dot x(t)\equiv 0$ ja pvm 1. yhtälön nojalla $y(t)\equiv 0$. Siis $z=\bar 0$: ainoa invariantti osajoukko on $\{\bar 0\}$, ja sama pätee N_2:n osalle. Lauseen 3.2 kohdan (b) nojalla $\bar 0$ on asymptoottisesti stabiili. $\square$

3. <u>Väite</u>: Tasapainotila $\bar 0$ on asymptoottisesti stabiili.

<u>Tod</u>. Selvästi $f=(f_1,f_2,f_3)=(e^{-x-y}-1,\ e^{-y-z}-1,\ -z)\in C^1(\mathbb{R}^3)$ ja $\bar 0$ on todella kriittinen piste.

Linearisoidaan derivaattamatriisin avulla:

$$(Df)(x,y,z)=\begin{bmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z}\\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z}\\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} & \frac{\partial f_3}{\partial z}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-e^{-x-y} & -e^{-x-y} & 0\\ 0 & -e^{-y-z} & -e^{-y-z}\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix},$$

erityisesti $A=(Df)(\bar 0)=\begin{bmatrix}-1 & -1 & 0\\ 0 & -1 & -1\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}$, $\det(A-\lambda I)=$

$$\begin{vmatrix}-1-\lambda & -1 & 0\\ 0 & -1-\lambda & -1\\ 0 & 0 & -1-\lambda\end{vmatrix} = -(\lambda+1)^3=0 \Leftrightarrow \lambda_{1,2,3}=-1<0.$$

Voidaan soveltaa Poincarén lausetta 3.9, ja sen nojalla $\bar 0$ on asymptoottisesti stabiili. $\square$

3
AS
huhtik. 8, 2015

4. Kriittiset pisteet:

$f_1(x,y) = 2y - xy = y(2-x) = 0$
$f_2(x,y) = -x - y + xy = 0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases}$

tai $\begin{cases} y=0 \\ x=0 \end{cases}$, siis $\bar{0}=(0,0)$ ja $(2,2)$.

Selvästi $f=(f_1,f_2)\in C^1(\mathbb{R}^2)$, linearisoidaan derivaattamatriisin avulla:

$$(Df)(x,y) = \begin{bmatrix} -y & 2-x \\ -1+y & -1+x \end{bmatrix}.$$

Erityisesti $A=(Df)(\bar{0}) = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$, $\det(A-\lambda I) =$
$\begin{vmatrix} -\lambda & 2 \\ -1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2+\lambda+2=0 \Leftrightarrow \lambda = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{7}}{2} \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}(\lambda)$
$= -\frac{1}{2} < 0$. Voidaan soveltaa Poincarén lausetta 3.9, ja sen nojalla $\bar{0}$ on asymptoottisesti stabiili.

Erityisesti $A=(Df)(2,2) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\det(A-\lambda I) =$
$\begin{vmatrix} -2-\lambda & 0 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda+2)=0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2=-2 \in \mathbb{R}$,
eli ja $\lambda_1 = 1 > 0$. Voidaan soveltaa Poincarén lausetta 3.10, ja sen nojalla $(2,2)$ on epästabiili.

5. Väite. Tasapainotila $\bar{0}$ on asympt. stabiili.

Tod. $f_1(x,y) = -y - x(1+x^2+y^2)^{1/2}$, $f_2(x,y) = -y(1+x^2+y^2)^{1/2}$
ja selvästi $f=(f_1,f_2)\in C^1(\mathbb{R}^2)$.

Linearisoidaan derivaattamatriisin avulla:

$$(Df)(x,y) = \begin{bmatrix} -(1+x^2+y^2)^{1/2} - x^2(1+x^2+y^2)^{-1/2} & -1-xy(1+x^2+y^2)^{-1/2} \\ -xy(1+x^2+y^2)^{-1/2} & -(1+x^2+y^2)^{1/2} - y^2(1+x^2+y^2)^{-1/2} \end{bmatrix}$$

erityisesti $A=(Df)(\bar{0}) = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $\det(A-\lambda I) =$
$\begin{vmatrix} -1-\lambda & -1 \\ 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda+1)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda_{1,2} = -1 < 0$. Voidaan

soveltaa Poincarén lausetta 3.9, joka antaa suoraan väitteen. □

4
AS
hoj-8, 2015

6. Voidaan olettaa että matriisi A, siis neliömuoto V on pos. definiitti; neg. def vastaavasti.

Väite. Funktio $f(x) = V(x) + h(x)$ on lokaalisti pos. definiitti.

Tod. Olkoon $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{\bar{0}\}$, jolloin voidaan kirjoittaa $x = \|x\| y$, josta $y = \frac{x}{\|x\|} \in S^{n-1}$, siis $\|y\| = 1$. Koska $\mathbb{R}^n$:n yksikköpallo S^{n-1} on rajoitettu ja suljettu, siis kompakti, jatkuva funktio $V(x) = x^T A x$ saavuttaa siinä Heine-Borelin lauseen nojalla maksiminsa ja miniminsä, M ja m, ja nämä ovat positiivisia koska $V(x) = x^T A x = 0 \iff x = \bar{0}$ (A pos. definiitti) siis

$$0 < m \leq V(y) \leq M \text{ kaikilla } y \in S^{n-1},$$

josta

$$m\|x\|^2 \leq V(y)\|x\|^2 = V(x) \leq M\|x\|^2 \text{ kaikilla } x \in \mathbb{R}^n.$$

Koska $O(x) \to 0$, löytyy sellainen $r > 0$ että $B(\bar{0}, r) \subset \Omega$ ja $|O(x)| < m$ kaikilla $x \in B(\bar{0}, r)$. Siten, jos $x \in B(\bar{0}, r) \setminus \{\bar{0}\}$, niin

$$f(x) \geq m\|x\|^2 - |h(x)| \geq (m - |O(x)|)\|x\|^2 > 0.$$

Lisäksi $f(\bar{0}) = 0$ sillä $h(\bar{0}) = 0$. Siten f on pos. definiitti kuulassa $B(\bar{0}, r)$. □

Huom. Lause 3.9 pätee tehtävässä 1, mutta ei tehtävässä 2. Selvitä itsellesi.