# Autonomiset systeemit, 1. vk. 4.3.2015, ratkaisut

**1.** Vastaava 1. kl. pari sijoituksella $x(t)=u(t)$, $y(t)=\dot u(t)$:

$$\begin{cases} \dot x = y \\ \dot y = \ddot u = -cu - 2\dot u = -cx-2y. \end{cases} \qquad (1)$$

Merk. $z = (x\ y)$ ja $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -c & -2 \end{bmatrix}$. Pari (1) voidaan kirjoittaa

$$\dot z = Az, \qquad (2)$$

siis vakiokertoiminen HS.

Matriisin $A$ ominaisarvot: $\det(A-\lambda I) =$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -c & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2+2\lambda+c=0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{-2\pm\sqrt{4-4c}}{2} = -1\pm\sqrt{1-c}$$

Selvästi $\mathrm{Re}(\lambda)<0 \Leftrightarrow 1-c<1 \Leftrightarrow c>0$.

Kun $c=0$, $\lambda_1=0$, $\lambda_2=-2$, yksinkertaiset ja $\mathrm{Re}(\lambda)\le 0$.

Kun $c<0$, toinen $\mathrm{Re}(\lambda)>0$.

Lauseen 2.1 nojalla pari (2) on asymptoottisesti stabiili kun $c>0$, stabiili kun $c=0$, muulloin epästab.

**2.** Väite. Linearoinnin pari on asymptoottisesti stabiili.

Tod. Merk. $z=(x\ y)$. Tällöin pari voidaan kirjoittaa

$$\dot z = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{t^2}{1+t^2} \\ 4+\frac{1}{1+t^2} & -3 \end{bmatrix} z, \quad \text{siis HS}. \qquad (1)$$

Jaetaan matriisi summaksi $A+B(t)$ jossa $B(t)$ on "pieni" ajan $t$ kuluessa; termi $\frac{t^2}{1+t^2}$ ei ole sitä, joten

$$\frac{t^2}{1+t^2} = \frac{1+t^2}{1+t^2} - \frac{1}{1+t^2} = 1-\frac{1}{1+t^2},$$ jossa $\frac{1}{1+t^2}$ on pieni.

2
AS
2 kk. 4.3.2005

Siis $A = \begin{bmatrix}1 & -1\\ 4 & -3\end{bmatrix}$ (vakio) ja

$B(t) = \begin{bmatrix}0 & \frac{1}{1+t^2}\\ \frac{1}{1+t^2} & 0\end{bmatrix}$ (jatkuva).

$A$:n ominaisarvot: $\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix}1-\lambda & -1\\ 4 & -3-\lambda\end{vmatrix} =$
$\lambda^2+2\lambda+1 = (\lambda+1)^2 = 0 \iff \lambda = -1$ (kaksinkertainen),
siten $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$.

Mat. $B(t)$ normi: $\|B(t)\| \le \|B(t)\|_{Fr} = \left(\frac{1}{(1+t^2)^2}+\frac{1}{(1+t^2)^2}\right)^{\frac{1}{2}}$
$= \frac{\sqrt{2}}{1+t^2}$), joten $\int_0^\infty \|B(t)\|\,dt \le \int_0^\infty \frac{\sqrt{2}}{1+t^2}\,dt < \infty$.

Voidaan käyttää lausetta 2.2, josta väite seuraa. $\square$

3. (a) Väite. $V(x,y) = x^4+2y^2$ toimii heikkona Ljapunovin funktiona alueessa $\Omega = \mathbb{R}^2$.

Tod. Selvästi $V$ on pos. definiitti alueessa $\mathbb{R}^2 \ni 0$.

Derivaatta: $\dot V(x,y) = 4x^3(-x+y)+4y(-x^3-x^2y) =$
$-4x^4-4x^2y^2 = -4x^2(x^2+y^2) \le 0$ kaikilla
$(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Siten $V$ on heikko Ljapunovin funktio alueessa
$\Omega = \mathbb{R}^2$. $\square$

(b) Väite. Tasapainotila $\bar 0$ on asymptoottisesti stabiili.

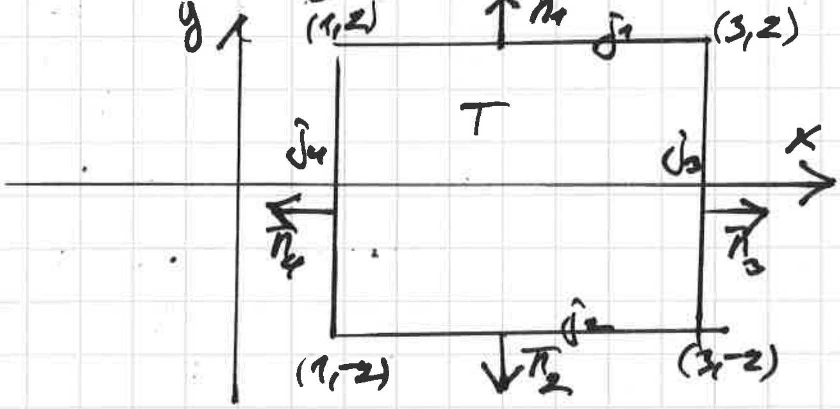
Tod. Käytetään lausetta 3.2 kohtaa (b). Ensiksikin $N = N_\Omega = \{(0,y) \mid y \in \mathbb{R}\}$.
Valitaan $r = 1$, jolloin $\bar B = \bar B(\bar 0, 1) \subset \Omega = \mathbb{R}^2$.
Olkoon $z = (0,y)$ joukon $N \cap \bar B = \{(0,y) \mid |y| \le 1\}$ mielivaltainen alkupiste ja $\lambda_z$ sen kautta ratkaisu. Tällöin $\lambda_z = (x(t), y(t)) = (0, y(t))$ kaikilla $t$, joten $x(t) \equiv 0$, $\dot x(t) \equiv 0$, ja näin 1. yhtälöstä saadaan $y(t) \equiv 0$. Erityisesti $z = (0, y(0)) = \bar 0$.

Siis ainoa invariantti osajoukko on yksiö $\{\bar{0}\}$, ja lauseen 3.1 kohdasta (c) seuraa väite. □

3
AS
1.66.-5.3.2014

4. (a) Väite. Suorakaide $T$ on positiivisesti invariantti.

Tod. Käytetään lausetta 1.1; selvästi $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$.




$T$:n reuna $\partial T = j_1 \cup j_2 \cup j_3 \cup j_4$ paloittain säännöllinen, ulkonormaalit:

$\bar{n}_1 = (0,1)$, $\bar{n}_2 = (0,-1)$, $\bar{n}_3 = (1,0)$ ja $\bar{n}_4(-1,0)$.

$$f = (f_1, f_2) = (-x^2+y+4,\ -xy+1)$$

$\bar{n}(x,y) \cdot f(x,y)$ reunalla $\partial T$:

$j_1$: $\bar{n}_1 \cdot f = f_2(x,2) = 1-2x < 0$ kaikilla $1 \le x \le 3$,

$j_2$: $\bar{n}_2 \cdot f = -f_2(x,-2) = -2x-1 < 0$ kaikilla $1 \le x \le 3$,

$j_3$: $\bar{n}_3 \cdot f = f_1(3,y) = -5+y < 0$ kaikilla $-2 \le y \le 2$,

$j_4$: $\bar{n}_4 \cdot f = -f_1(1,y) = -3-y < 0$ kaikilla $-2 \le y \le 2$.

Siis $\bar{n} \cdot f < 0$ reunalla $\partial T$, ja lauseen 1.1 nojalla $T$ on positiivisesti invariantti. □

(b) Väite. $\omega(z)$ on epätyhjä, kompakti ja yhtenäinen, kun $z = (2,0)$.

Tod. Määrittelyjoukko on $D = \mathbb{R}^2$. Huomataan: $z \in T$, joten kohdassa (a) todistetun invarianttiuden nojalla $\gamma^+(z) \subset T$, siis

$$cl_D(\gamma^+(z)) = \overline{\gamma^+(z)} \subset \overline{T} = T \cup \partial T,$$

jossa $K = T \cup \partial T$ on selvästi kompakti; väite siis seuraa lauseen 1.4 kohdasta (e), josta väite. □