Autonomiset systeemit
Harjoitus 8, kevät 2015

Luennoilla esitettiin että kun Liénardin yhtälön $\ddot{u} + f(u)\dot{u} + g(u) = 0$ kanssa yhtäpitävässä parissa

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -g(x) - f(x)y \end{aligned} \tag{3.11 b}$$

funktiot f ja g ovat jossain nollan ympäristössä jatkuvia ja siinä pätee

$$(1) \quad f(x) \geq 0 \quad \text{ja} \quad (2) \quad g(0) = 0 \quad \text{ja} \quad xg(x) > 0 \text{ muulloin,} \tag{i}$$

niin jossain origon ympäristössä heikkona Lyapunovin funktiona toimii

$$V(x, y) = G(x) + y^2/2, \quad \text{jossa } G(x) = \int_0^x g(s)\, ds. \tag{ii}$$

Sovelletaan tätä tietoa pareihin tehtävissä 1-2, joissa on tarkoitus osoittaa tasapainotila $\mathbf{0}$ asymptoottisesti stabiiliksi.

1.
$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -\sin x - (x-1)^2 y \end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned} \dot{x} &= -xy^2 - 6y^5 \\ \dot{y} &= x \end{aligned}$$

3. Tutki Poincarén lauseen 3.9 avulla tasapainotilan $\mathbf{0}$ stabiilisuutta systeemissä

$$\begin{aligned} \dot{x} &= e^{-x-y} - 1 \\ \dot{y} &= e^{-y-z} - 1 \\ \dot{z} &= -z. \end{aligned}$$

4. Etsi parin

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 2y - xy \\ \dot{y} &= -x - y + xy \end{aligned}$$

kriittiset pisteet ja tutki niiden stabiilisuutta Poincarén lauseiden 3.9 ja 3.10 avulla.

5. Osoita autonomisen parin

$$\dot{x} = -y - x\sqrt{1 + x^2 + y^2}$$
$$\dot{y} = -y\sqrt{1 + x^2 + y^2}$$

tasapainotila $\mathbf{0}$ asymptoottisesti stabiiliksi.

6. Olkoon neliömatriisin A määrittelemä neliömuoto $V(x) = x^T Ax$ positiivisesti (vaihtoehtoisesti negatiivisesti) definiitti, ja olkoon $h : \Omega \to \mathbf{R}$ origon sisältävässä alueessa Ω määritelty reaalifunktio, joka toteuttaa pienuusehdon

$$h(x) = \|x\|^2 O(x), \quad O(x) \to 0 \text{ kun } x \to \mathbf{0}.$$

Osoita että tällöin reaalifunktio $f : \Omega \to \mathbf{R}$,

$$f(x) = V(x) + h(x),$$

on lokaalisti, siis jossain origon ympäristössä, positiivisesti (neg.) definiitti.

Ohje. Haarukoi funktion V arvot $\mathbf{R}^3$:ssa tarkastelemalla sen arvoja kompaktissa pallossa, siinä Heine-Borel.