Autonomiset systeemit
Harjoitus 4, kevät 2015

1. Todista lauseen 1.4 kohta (f).

Ohje. Lauseen 1.4 kohdat (c) ja (e) sekä Poistumislause (tai lemma 1.1).

2. Todista lauseen 1.4 kohta (b).

Ohjeita. Lauseen 1.4 kohta (a). Inkluusioista vaikeampaa $cl_D\big(\gamma^+(x)\big) \subset \gamma^+(x) \cup \omega(x)$ osoitettaessa voidaan olettaa että $y \in cl_D\big(\gamma^+(x)\big) \setminus \gamma^+(x)$. Tällöin jokaisella $k \in \mathbf{N}_+$ pätee $y \notin x([0,k])$, ja ratkaisun kuvajoukko $x([0,k])$ on kompaktina suljettu. Tätä hyväksi käyttäen aikajono jolle $t_k \to \infty$.

Taustaa matriisinormeista: Olkoon $\| * \|$ $\mathbf{R}^n$:n (tai $\mathbf{C}^n$:n) euklidinen normi. Se määrittelee matriiseille $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$ (tai $A \in \mathbf{C}^{n\times n}$) nk. operaattorinormin

$$\|A\| = \sup_{x\neq \mathbf{0}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|. \tag{1}$$

Itse asiassa suppi on tässä maksimi (seuraa Heine-Borelista), joten normi on todella äärellinen. Suora seuraus määritelmästä:

$$\|Ax\| \le \|A\|\|x\|. \tag{2}$$

Matriisin $A = (a_{ij})$ nk. Frobenius-normi on $\|A\|_{Fr}^2 = \sum_{i,j} |a_{ij}|^2$, joka ei ole kuitenkaan operaattorinormi.

3. Olkoot A ja B $n \times n$-neliömatriiseja. Osoita että operaattorinormille pätee

$$\|AB\| \le \|A\|\|B\|.$$

4. Olkoot A ja B $n \times n$-neliömatriiseja. Osoita että operaattorinormille pätee

$$\|A\| \le \|A\|_{Fr}.$$

Ohje. Kirjoita A:n rivivektorit $a_{i*} = (a_{i1}, \cdots, a_{in})$ ja esitä $\|Ax\|^2$ niiden avulla. Pistetulo ja Schwarz.

5. Olkoon $x(t) = t \cdot x$ harjoituksen 1 tehtävän 1 differentiaaliyhtälön ratkaisu jolla $x = x(0) \in \mathbf{R}$. Osoita että

(a) se on asymptoottisesti stabiili kun $x < 0$ (Huom. On sitä aina kun $x \neq 0$),

(b) epästabiili kun $x = 0$.

Ohjeita. Määritelmä 2.2. (a) Olkoon $y(t) = t \cdot y$, $y = y(0) < 0$, toinen ratkaisu. Tutki derivaatan avulla funktion $|x(t) - y(t)|$ kulkua. (b) Sopiva $\epsilon > 0$.

6. Kuten helposti nähdään, lineaarisella 2×2-homogeenisysteemillä, parilla

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2e^{2t} & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)$$

on $\mathbf{R}$:ssä ratkaisu $\mathbf{x}(t) = (e^{-t}, e^{t})$. Onko pari stabiili, asymptoottisesti stabiili vai epästabiili?

Ohje. Lemma 2.1.