Autonomiset systeemit
Harjoitus 2, kevät 2015

Huom. Numeroinnit $(*,*)$ viittaavat luentoihin, niin jatkossakin.

1. Olkoon $f : D \to \mathbf{R}^n$ lokaalisti Lipschitz alueessa $D \subset \mathbf{R}^n$. Olkoon osajoukko $B \subset D$ kompakti (= suljettu ja rajoitettu) ja konveksi (= pisteiden $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in B$ yhdistysjanalle pätee $[\mathbf{x}, \mathbf{y}] \subset B$). Osoita että f on Lipschitz siinä.

Ohje. Avoimista Lipschitz-kuulista joukon B avoin peite ja tämän äärellinen osapeite (peitekompaktius). Sovella sitten edellisen harjoituksen tehtävän 5 tulosta valitsemalla janalta jono, jossa peräkkäiset pisteet ovat tarpeeksi lähellä toisiaan (on tekemistä kuulien säteiden kanssa - tässä voit soveltaa myös peitteen Lebesguen lukua, kts. Väisälä: Topologia I).

2. Palataan lauseen 1.1 todistukseen. Osoita että siinä esiintyvästä epäyhtälöstä (1.9) seuraa epäyhtälö (1.10).

Ohje. Voit pitää tunnettuna väliarvolauseen seurauksena että kuvaus

$$t \mapsto \|t \cdot x - t_1 \cdot x\|$$

on Lipschitz välillä $[t_1 - \delta, t_1]$ (kts. harjoituksen 1 tehtävän 4 todistus).

3. Tarkastellaan autonomista paria

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x - y^2 \\ \dot{y} &= xy - y. \end{aligned}$$

Olkoon $z = (x, y) \in \mathbf{R}^2$ mielivaltainen. Osoita että vastaava rata eteenpäin, $\gamma^+(z)$, on rajoitettu joukko ja että parin ratkaisu $t \cdot z$ on olemassa kaikilla $t \geq 0$.

Ohje. Etsi positiivisesti invariantteja joukkoja.

4. Olkoon $x \in D$. Olkoon $\gamma(x)$ autonomisen systeemin (1.1) vastaava rata. Osoita että jos tämä sisältää kriittisen pisteen, niin itse x on kriittinen ja $\gamma(x) = \{x\}$.

Ohje. Piste $y \in D$ on kriittinen, jos $f(y) = \mathbf{0}$ (materiaali sivu 14). OY-lauseen takaama yksikäsitteisyys.