

Autonomiset systeemit

Harjoitus 10, kevät 2015

1. Luentojen esimerkin 3.11 parin (3.17),

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -x(1 - x^2 - y^2) \\ \dot{y} &= -y(1 - x^2 - y^2),\end{aligned}$$

kriittiset pisteet $z = (x, y) \in S^1 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$ ovat epästabiileja, mitä et kuitenkaan voi osoittaa lauseen 3.10 avulla, ainakaan suoraviivaisesti. Miksi?

2. Osoita edellisessä tehtässä mainittu epästabiilisuus.

Ohje. Luennoilta tunnetaan kyseisen parin origoon liittyvä asymptoottisen stabiilisuuden alue.

3. Osoita tasapainotila $\mathbf{0}$ asymptoottisesti stabiiliksi parissa

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -x + \sin y \\ \dot{y} &= -2x - 3y\end{aligned}$$

ja määrää asymptoottisen stabiilisuuden alue.

Ohje. Linearisointi toimii alkuosassa ja antaa vihjeen Lyapunovin funktioksi.

4. Osoita tasapainotila $\mathbf{0}$ asymptoottisesti stabiiliksi parissa

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -x^3 - x^2y\end{aligned}$$

ja määrää asymptoottisen stabiilisuuden alue. Miksi linearisointi ei nyt toimi?

Ohje. ”Liénardin menettely”.

5. Tasapainotila $\mathbf{0}$ on asymptoottisesti stabiili parissa (tehtävä 1, harjoitus 8)

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -\sin x - (x - 1)^2y.\end{aligned}$$

Tutki, ei suinkaan tyhjentävästi - se olisi liian vaikeaa -, asymptoottisen stabiilisuuden aluetta.

Ohje. ”Liénardin menettely” antaa käyttökelpoisen Lyapunovin funktion.