Autonomiset systeemit
Harjoitus 1, kevät 2015

1. Tarkastellaan eri alkuehdoilla $x(0) = x_0 \in \mathbf{R}$ autonomisen differentiaaliyhtälön

$$\dot{x} = x^2 - x^3$$

ratkaisujen loppukäyttäytymistä, siis käyttäytymistä kun $t \to \infty$. Onko jokainen ratkaisu edes hengissä ajassa äärettömiin, ja jos on, onko ratkaisulla raja-arvo ja mikä silloin? Yritä ilman eksplisiittistä ratkaisua.

Ohje. Kurssin DYI lemma 2.1 on hyödyksi.

2. Mikä edellisen tehtävän DY:n ratkaisuista on selvästi epästabiili? Entä muut?

3. Autonomisella parilla

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -x \end{aligned}$$

on ratkaisut

$$\mathbf{z}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t \end{bmatrix}, \quad c_1, c_2 \in \mathbf{R}.$$

Osoita kahdella eri tavalla että niiden radat ovat origo-keskisiä ympyröitä.

4. Olkoon kuvaus $f = (f_1, \cdots, f_n) : D \to \mathbf{R}^n$ jatkuvasti derivoituva alueessa $D \subset \mathbf{R}^n$. Osoita että tällöin se on lokaalisti Lipschitz D:ssä.

Ohje. Väliarvolause sovellettuna komponentteihin f_k. Pistetulo ja Schwarzin epäyhtälö.

5. Pisteiden $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^n$ (tai missä tahansa vektoriavaruudessa) yhdistysjana on

$$[\mathbf{x}, \mathbf{y}] = \{(1-t)\mathbf{x} + t\mathbf{y} \,|\, 0 \le t \le 1\}.$$

Olkoon $(\mathbf{z}_k)_0^m$, $\mathbf{z}_k = (1-t_k)\mathbf{x} + t_k\mathbf{y}$, $0 = t_0 < \cdots < t_k < \cdots < t_m = 1$ (siis $\mathbf{z}_0 = \mathbf{x}$ ja $\mathbf{z}_m = \mathbf{y}$) jono kyseisen janan pisteitä otettuna järjestyksessä tämän päästä toiseen. Osoita että tällöin (ja tämä pätee kaikissa normiavaruuksissa)

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \sum_{k=1}^{m} \|\mathbf{z}_k - \mathbf{z}_{k-1}\|,$$

ts. janan pituus on osiensa summa (kuten intuitiokin kertoo, piirrä kuva).