

Autonomiset systeemit
Harjoitus 9, kevät 2015

1. Osoita yhtälön

$$\ddot{u} + k\dot{u} + \sin u = 0$$

ratkaisu 0 asymptoottisesti stabiiliksi parametrin arvoilla $k > 0$.

2. Määritä Poincarén lauseiden avulla van der Polin yhtälöön liittyvän parin

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -x + e(1 - x^2)y\end{aligned}$$

tasapainotilan $\mathbf{0}$ stabiilisuuden laatu. Mitkä parametrin $e \in \mathbf{R}$ arvot eivät kuulu kyseisten lauseiden piiriin?

3. Kun lemmoja 3.4 ja 3.5 aavistus säädetään, niiden avulla voidaan todistaa myös lause 3.9 - kylläkin yhdellä lisäoletuksella heikennettynä.

- (a) Mikä tämä lisäoletus on?
 - (b) Mikä se säätö eli lemmojen pikku muutos on?
- Aivan lyhyet vastaukset riittävät.

4. Todista lause 3.6.

Ohje. Osoitettava myös stabiilisuus: analysoi lauseen 3.5 todistusta.

5. (a) Osoita käyttämällä lausetta 1.1 että esimerkin 3.12 parissa (3.18),

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -x(1 + x) \\ \dot{y} &= -3y(1 + x),\end{aligned}$$

alueet

$$D_{c,d} = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid V(x, y) = x^2 + y^2 < c, x > d\},$$

joissa $c > 0$ ja $-1 < d < 0$, ovat positiivisesti invariantteja.

- (b) Mitä tämän perusteella voidaan päätellä origoon liittyvästä asymptoottisen stabiilisuuden alueesta?
- (c) Entä parin kriittisten pisteiden $(-1, y)$, $y \in \mathbf{R}$, stabiilisuudesta?

Huom. Kyllä joukot $D_{c,d}$ ovat positiivisesti invariantteja myös kun $d = -1$, mutta kohdassa (b) näistä joukoista ei ole hyötyä ainakaan suoraan. Miksi?