

## Autonomiset systeemit

Harjoitus 7, kevät 2015

1. Osoita että funktio  $V(x, y) = x^2 + xy + y^2$  toimii jossain origon ympäristössä tasapainotilaan  $\mathbf{0}$  liittyvänä vahvana Lyapunovin funktiona autonomisessa parissa

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sin y \\ \dot{y} &= -2x - 3y.\end{aligned}$$

Varmista tarvittavat definiittisyydet vaikka analyttisesti (neliömuodot, Hessen matriisi).

2. Tarkastellaan seuraavaa (lineaarista) homogeeniparia:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x + 4y \\ \dot{y} &= -2x - 5y.\end{aligned}$$

Löydätkö yritteellä  $V(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$ ,  $a, b, c \in \mathbf{R}$ , tasapainotilaan  $\mathbf{0}$  liittyvän vahvan Lyapunovin funktion? Varmista definiittisyydet analyttisesti.

3. Tutki Lyapunovin teorian avulla tasapainotilan  $\mathbf{0}$  stabiilisuutta autonomisessa parissa

$$\begin{aligned}\dot{x} &= e^y - 1 \\ \dot{y} &= x^3.\end{aligned}$$

4. Etsi yritteellä  $W(x, y) = axy^2 + bx^3$ ,  $a, b \in \mathbf{R}$ , Lyapunovin loittofunktio parille

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x^2 - y^2 \\ \dot{y} &= -2xy\end{aligned}$$

ja osoita sillä tämän parin tasapainotila  $\mathbf{0}$  epästabiiliksi. Missä alueessa loittofunktioehdot toteutuvat?

5. Formuloi ja todista lauseen 3.2 esimerkkiä seuraten lauseesta 3.3 yleistys, jossa  $W(x)$  on vain heikko Lyapunovin loittofunktio, ts. derivaatta  $\dot{W}(x)$  on positiivisesti vain semidefiniitti, mutta joka kuitenkin takaa  $\mathbf{0}$ :n epästabiilisuuden.

Ohje. Lause 3.1; osa lauseen 3.3 oletuksista säilyy, yksi tulee lisää.

6. Analysoi edellisen tehtävän tuloksena saadun lauseen avulla - kutsukaamme sitä lauseen 3.3 yleistykseksi - tasapainotilan  $\mathbf{0}$  stabiilisuus van der Polin parissa

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -x + e(1 - x^2)y,\end{aligned}$$

kun  $e > 0$ .