

Autonomiset systeemit

Harjoitus 6, kevät 2015

1. Etsi autonomisen parin

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -3x^2 + y^2 - 1 \\ \dot{y} &= 2x + y\end{aligned}$$

kriittiset pisteet ja siirrä ne yksinkertaisilla muunnoksilla kukin vuorollaan origoon. Esitä muunnetut autonomiset parit.

Ohje. Kaksi kriittistä pistettä.

2. Osoita Lyapunovin funktion avulla tilan $\mathbf{0}$ asymptoottinen stabiilisuus parissa

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -x + y - xy^2 \\ \dot{y} &= -2x - y - x^2y.\end{aligned}$$

3. Tutkitaan autonomisen systeemin

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \frac{1}{2}yz \\ \dot{y} &= -xz \\ \dot{z} &= 2xy\end{aligned}$$

tasapainotilaa $\mathbf{0}$. Osoita se stabiiliksi muodostamalla siihen liittyvä heikko Lyapunovin funktio. Osoita lisäksi että stabiilisuus ei ole asymptoottista - itse asiassa yksikään ratkaisu $\mathbf{u}(t) = (x(t), y(t), z(t)) \neq \mathbf{0}$ ei suppene origoon.

Ohje. Kokeile parametrillista neliöiden summaa.

4. Osoita Lyapunovin funktion avulla tila $\mathbf{0}$ asymptoottisesti stabiiliksi parissa

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -4x + y + x^3 \\ \dot{y} &= -x + x^2y.\end{aligned}$$

Ohje. Riittää tutkia vain jotain origon ympäristöä, johon löytyy helpoiten heikko Lyapunovin funktio. Lauseen 3.2 kohta (b).

5. Osoita Lyapunovin funktion avulla että autonomisen parin

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -x + 2y^2 \\ \dot{y} &= -y - 3xy\end{aligned}$$

tasapainotila $\mathbf{0}$ on asymptoottisesti stabiili. Onko se sitä globaalisti, ts. päteekö $t \cdot z \rightarrow \mathbf{0}$ aina kun $z = (x, y) \in \mathbf{R}^2$ (raja-arvossa luonnollisesti $t \rightarrow \infty$)?

Ohje. Yrite $V(x, y) = x^2 + ay^2$, jossa $a > 0$. Lisäkysymyksessä lauseet 1.1 ja 3.1.