

## Autonomiset systeemit

Harjoitus 5, kevät 2015

1. Tarkastellaan autonomista systeemiä  $\dot{x} = f(x)$  alueessa  $D \subset \mathbf{R}^n$ , jossa funktio  $f : D \rightarrow \mathbf{R}^n$  on lokaalisti Lipschitz. Pisteelle  $x \in D$  päteköön  $\gamma^+(x) \cap \omega(x) \neq \emptyset$ . Osoita että tällöin

$$(a) \quad t^+(x) = \infty, \quad (b) \quad \gamma(x) \subset \omega(x).$$

Ohje (b). Lauseen 1.4 kohta (c).

Huom. Itse asiassa tällöin pätee  $cl_D(\gamma(x)) = \omega(x)$ .

2. Onko lineaarinen  $3 \times 3$ -homogeenisysteemi

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -8 & 14 & -7 \end{bmatrix},$$

stabiili, asympotoottisesti stabiili vai epästabiili?

3. Seuraavassa lineaarisessa parissa  $c \in \mathbf{R}$  on vakio ja  $f, g$  jatkuvia funktioita:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x + cy + f(t) \\ \dot{y} &= -cx - y + g(t). \end{aligned}$$

(a) Osoita että pari on stabiili kun  $|c| > 1$ ,

(b) se on epästabiili kun  $|c| < 1$ .

4. Todista epäyhtälö (2.14).

Ohje. Mitä muotoa ovat perusjärjestelmän funktiot, erityisesti jos ominaisarvo sattuu olemaan useampikertainen (yleistetyt ominaisvektorit, DY II)? Frobenius-normista on hyötyä.

5. Osoita seuraava lineaarinen homogeenisysteemi asympotoottisesti stabiiliksi:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= xe^{-t} - 2y \\ \dot{y} &= 3x - 2y + ye^{-2t}. \end{aligned}$$

6. Osoita että lineaarisen yhtälön

$$\ddot{u} + a\dot{u} + (a + c(1 + t^2)^{-1})u = f(t)$$

kaikki ratkaisut ovat asympotoottisesti stabiileja, jos parametrille  $a$  pätee  $a > 0$ . Lisäksi oletetaan että  $c \in \mathbf{R}$  on vakio ja  $f(t)$  on jatkuva funktio.