Autonomiset systeemit
Harjoitus 3, kevät 2015

1. Tarkastellaan autonomista paria

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -2x + y\\ \dot{y} &= x - y.\end{aligned}$$

Olkoon $z = (x, y) \in \mathbf{R}^2$ mielivaltainen. Osoita että vastaava rata eteenpäin, $\gamma^+(z)$, on rajoitettu joukko ja että parin ratkaisu $t \cdot z$ on olemassa kaikilla $t \geq 0$. Vaikka pari on lineaarinen, yritä olla ratkaisematta sitä eksplisiittisesti.

Ohje. Etsi positiivisesti invariantteja joukkoja.

2. Olkoon $x(t)$ autonomisen systeemin (1.1) ratkaisu, jolla $x_\infty = \lim_{t\to\infty} x(t) \in D$ on olemassa. Osoita että tällöin x_∞ on kriittinen piste.

Huom. Vastaava pätee myös raja-arvolle $x_{-\infty} = \lim_{t\to-\infty} x(t) \in D$.

3. Olkoon $x \in D$ periodinen piste (ei kriittinen) ja $T > 0$ sen periodi. Ehkä tuntuu melko ilmeiseltä että luentojen yhtälö (1.12) pätee. Esitä kuitenkin todistus.

Ohje. OY-lauseen takaama yksikäsitteisyys ja Poistumislause.

4. Olkoon $x(t) = t \cdot x$ pisteestä $x \in D$ alkava autonomisen systeemin (1.1) ratkaisu, jolla $x_\infty = \lim_{t\to\infty} x(t) \in D$ on olemassa. Osoita että tällöin $\omega(x) = \{x_\infty\}$.

Ohje. Ehkä yksinkertaisinta on käyttää lausetta 1.4.

5. Tarkastellaan harjoituksen 1 tehtävän 1 autonomista yhtälöä

$$\dot{x}(t) = x(t)^2 - x(t)^3.$$

Ongelman dimensio on siis $n = 1$. Olkoon $x \in \mathbf{R}$ (kiinnitetty) piste.

(a) Määrää rajajoukot $\omega(x)$, $x \in \mathbf{R}$.

(b) Millä $x \in \mathbf{R}$ pätee $\gamma(x) \cap \omega(x) \neq \emptyset$?