Autonomiset systeemit
Harjoitus 12, kevät 2015

1. Tarkastellaan esimerkkiä 4.1: osoita että parilla (4.5) on origon ulkopuolella yhtäpitävä esitys (4.6), esitys napakoordinaateissa.

2. Luennoilla on esimerkissä 4.2 tarkasteltu paria

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y\\ \dot{y} &= -x^3 - (4x^2 + y^2 - 4)y.\end{aligned}$$

Sen ainoa kriittinen piste on $\mathbf{0}$, ja tälle löydettiin Lyapunovin funktio-loittofunktio $V(x,y) = x^4/4+y^2/2$: arvoilla $4x^4+y^2 \le 4$ pätee $\dot{V}(x,y) \ge 0$, arvoilla $4x^2+y^2 \ge 4$ puolestaan $\dot{V}(x,y) \le 0$,. Lisäksi

$$N = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, \dot{V}(x,y) = 0\} = C \cup \{(x,0) \,|\, x \in \mathbf{R}\},$$

jossa C on ellipsi $C = \{(x,y) \,|\, 4x^2 + y^2 = 4\}$.

Olkoot vakiot $c_2 > c_1 > 0$ sellaiset että ellipsi C sisältyy kompaktin renkaan $K = \bar{E}_{c_2} \setminus E_{c_1}$ sisukseen. Monesti käytetyllä päättelyllä nähdään että K on positiivisesti invariantti joukko. Olkoon $z = (x,y) \in K$. Koska ainoa kriittinen piste $\mathbf{0}$ ei kuulu joukkoon K, niin Poincarén-Bendixsonin lauseen nojalla rajajoukko $\omega(z) \subset K$ on periodinen rata.

(a) Osoita että $\omega(z) \not\subset C$.

(b) Osoita että $\omega(z) \not\subset N$.

Ohje. Rajajoukon $\omega(z)$ invarianttius. Kohdassa (a) implisiittinen derivointi.

3. Kuinka selität tehtävän 2 kohdan (b), kun muistetaan mitä on useasti puhuttu rajajoukon suhtautumisesta joukkoon N (esimerkiksi lause 3.1)?

4. Osoita että seuraavalla parilla on periodisia ratkaisuja:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 2x - y - x\sqrt{x^2 + y^2}\\ \dot{y} &= x + 2y - y\sqrt{x^2 + y^2}.\end{aligned}$$

5. Osoita että parilla

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x^2 - xy\\ \dot{y} &= -x^2\end{aligned}$$

ei ole periodisia ratkaisuja.

Ohje. Sopiva yksinkertainen funktio $u : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ kertojaksi.