

**Autonomiset systeemit**  
Harjoitus 11, kevät 2015

1. Etsi autonomisen parin

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -3x + 6(y - 1)^2 \\ \dot{y} &= (1 - y)(2 + x^2)\end{aligned}$$

kriittiset pisteet ja määrää niiden stabiilisuuden laatu.

2. Osoita tasapainotila  $\mathbf{0}$  asympotoottisesti stabiiliksi parissa

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -x^3 - x + y \\ \dot{y} &= -x\end{aligned}$$

ja määrää asympotoottisen stabiilisuuden alue.

Ohje. Linearisointi toimii alkuosaan.

3. Tarkastellaan paria

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x^3(1 - x^2 - y^2) \\ \dot{y} &= y(1 - x^2 - y^2).\end{aligned}$$

Osoita sen tasapainotila  $\mathbf{0}$  epästabiiliksi. Miksi lausetta 3.10 ei voi käyttää?

4. Tarkastellaan edelleen edellisen tehtävän paria. Olkoon piste  $z = (x, y) \in \mathbf{R}^2$  kiinnitetty. Mitä voit sanoa siitä alkavan radan rajajoukosta  $\omega(z)$  kun

$$(a) \quad 0 < \|z\| < 1, \quad (b) \quad \|z\| > 1?$$

Taaskaan ei haeta tyhjentävää vastausta.

Ohje. Lause 3.1; etsi funktio joka toimii jossain Lyapunovin loittofunktiona, toisaalla tavallisena Lyapunovin funktiona.

5. Osoita että lemmän 4.2 todistuksessa esiintyvät käyrät  $J_1$  ja  $J_2$  voivat kohdata toisensa pisteen  $t_1 \cdot z$  lisäksi korkeintaan pisteessä  $t_0 \cdot z = t_2 \cdot z$ .

Ohje. On oletettu että  $t_0 \cdot z \neq t_1 \cdot z \neq t_2 \cdot z$  ja että  $t \cdot z$  ei ole transversaalijanalla kun  $t \in ]t_0, t_1[ \cup ]t_1, t_2[$ .