Autonomiset systeemit, kevät 2015, harj. 7, ratkaisut (1)

1. Väite. Funktio V toimii vahvana Lyapunovin funktiona (lokaalisti)

Tod. ~~Käytetään~~ systemaattista neliömuodon definiittisyyden tutkimusta:

$z=(x,y)$, $V(x,y)=x^2+xy+y^2=z^TAz$, jossa $A=\begin{bmatrix}1 & \frac12\\ \frac12 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a & b\\ b & c\end{bmatrix}$ on symmetrinen. ~~Koska~~

(1) $\det A = ac-b^2=\frac34>0$ ja (2) $a=1>0$, neliömuoto V on pos. definiitti $\mathbb{R}^2$:ssa.

Pariin liittyvä derivaatta $g(x,y):=\dot V(x,y)=(2x+y)\sin y$
$+(x+2y)(-2x-3y)=(2x+y)\sin y-2x^2-6y^2-7xy$; $g(\bar 0)=0$.

$g_x=2\sin y-4x-7y$; $g_x(\bar 0)=0$.

$g_y=\sin y+(2x+y)\cos y-12y-7x$; $g_y(\bar 0)=0$.

$g_{xx}=-4$, $g_{xy}=2\cos y-7$, $g_{yy}=2\cos y-(2x+y)\sin y-12$

g:n Hessen matriisi origossa on

$$H(\bar 0)=\begin{bmatrix}g_{xx}(\bar 0) & g_{xy}(\bar 0)\\ g_{xy}(\bar 0) & g_{yy}(\bar 0)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4 & -5\\ -5 & -10\end{bmatrix},$$ joten

(3) $\det H(\bar 0)=15>0$ ja (4) $g_{xx}(\bar 0)=-4<0$, ts. $H(\bar 0)$ on neg. definiitti, mistä seuraa että $\dot V=g$ on lokaalisti neg. definiitti. Kaiken kaikkiaan V on lokaali vahva Lyapunovin funktio. $\square$

2. Yrite $V(x,y)=ax^2+bxy+cy^2=z^TAz$, missä $z=(x,y)$ ja $A=\begin{bmatrix}a & b/2\\ b/2 & c\end{bmatrix}$.
Jotta itse V pos. definiitti, niin
(1) $\det A=ac-b^2/4>0$ ja (2) $a>0$.

Derivaatta

$\dot{V}(x,y) = (2ax+by)(x+4y) + (bx+2cy)(-2x-5y)$

$= (2a-2b)x^2 + (8a-4b-4c)xy + (4b-10c)y^2 =: g(x,y)$; $g(\bar{0})=0$

$g_x = (4a-4b)x + (8a-4b-4c)y$; $g_x(\bar{0}) = 0$

$g_y = (8a-4b-4c)x + (8b-20c)y$; $g_y(\bar{0}) = 0$

$g_{xx} = 4a-4b$, $g_{xy} = 8a-4b-4c$, $g_{yy} = 8b-20c$;

g:n Hessen matriisi (origossa) on

$H(\bar{0}) = \begin{bmatrix} 4a-4b & 8a-4b-4c \\ 8a-4b-4c & 8b-20c \end{bmatrix}$, joten (3) $\det H(\bar{0}) = (4a-4b)(8b-20c)$

$-(8a-4b-4c)^2 = 32ab - 80ac - 32b^2 + 80bc - 64a^2 - 16b^2 - 16c^2 + 64ab$

$+64ac - 32bc = -64a^2 - 48b^2 - 16c^2 + 96ab - 16ac + 48bc$

$= 16(-4a^2 - 3b^2 - c^2 + 6ab - ac + 3bc) > 0$

ja (4) $4a-4b < 0 \iff a < b$.

Esimerkiksi valinta $a=1$, $b=c=2$ toteuttaa ehdot (1-4). Siis on löydetty vahva Ljapunovin funktio $V(x,y) = x^2 + 2xy + 2y^2$, joka toimii aidosti lokaalisti.

Huom. Itse asiassa V toimii globaalisti: $V(x,y) = (x+y)^2 + y^2$ ja $\dot{V}(x,y) = -2(x+2y)^2 - 4y^2$, siis $\mathbb{R}^2$:ssa vahva L.

3. Väite. Tasapainotila $\bar{0}$ on epästabiili.

Tod. Yritä Ljapunovin kokeilufunktioksi $W(x,y) = xy$.

Tällöin $W \in C^1(\mathbb{R}^2)$ ja

(1) $W(\bar{0}) = 0$, (3) $W(x,y) > 0$ tasoneljänneksissä 1 ja 3, siis erityisesti origon "lähellä". Lauseen 3.3 kohta (2):

3
KS
hay. 7, 2015

Derivaatta on
$\dot V(x,y) = y(e^y - 1) + x^4$; osoitetaan tämä pos. definiitiksi $\mathbb{R}^2$:ssa:

Tunnetusti eksponenttifunktio $y \mapsto e^y$ on aidosti kasvava ja $e^y \gtreqless 1 \iff y \gtreqless 0$. Siten $y(e^y - 1) > 0$ kaikilla $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ja $= 0$ kun $y = 0$.

V on siis (vahva) Ljapunovin loitofunktio alueessa $\Omega = \mathbb{R}^2$, ja lauseen 3.3 nojalla tasapainotila $\bar 0$ on epästabiili. □

4. Väite. Tasapainotila $\bar 0$ on epästabiili.

Tod. Yrite $W(x,y) = axy^2 + bx^3$, $a, b \in \mathbb{R}$. Selvästi $W \in C^1(\mathbb{R}^2)$. Käytetään siis lausetta 3.3.

Jos $b > 0$ (tai $b < 0$ vastaavasti), niin $W(x,0) = bx^3 > 0$ kun $x > 0$. Tällöin kohta (3) toteutuu.

Luonnollisesti $W(\bar 0) = 0$, joten (1) toteutuu.

Kohta (2): $\dot W(x,y) = (ay^2 + 3bx^2)(x^2 - y^2) + 2axy(-2xy)$
$$= 3bx^4 - ay^4 + (-3a - 3b)x^2y^2,$$
joten tämän tekemiseen pos. definiitiksi riittää olla $a < 0$, $b > 0$ ja $-3a - 3b \geq 0 \iff a + b \leq 0$.

Voidaan vaikka valita $a = -1$ ja $b = 1$: tällöin $W(x,y) = -xy^2 + x^3$ on (vahva) Ljapunovin funktio alueessa $\Omega = \mathbb{R}^2$, ja lauseen 3.3 nojalla tasapainotila $\bar 0$ on epästabiili. □

5. Väite (lauseen 3.3 yleistys).

Olkoon $\bar 0$ systeemin kriittinen piste. Olkoon $V = V(x) : \Omega \to \mathbb{R}$ alueessa $\Omega \subset D$ määritelty C^1-funktio,

4
AS
heij. 7, 2017

$\bar{o} \in \Omega$. Toteutukoon se ehdot:

(1) $W(\bar{o}) = 0$, (2) Derivaatta $\dot{W}(x) = \nabla W(x) \cdot f(x)$ on pos. semidefiniitti alueessa Ω,

(3) Jokaisessa origon ympäristössä on pisteitä x, joille $W(x) > 0$,

(4) $N = \{x \in \Omega \mid \dot{W}(x) = 0\}$; löytyy sellainen $r > 0$ että $\bar{B} = \bar{B}(\bar{o}, r) \subset \Omega$ ja joukon $N \cap \bar{B}$ ainoa invariantti osajoukko on pelkkä $\{\bar{o}\}$.

Tällöin tasapainotila $\bar{o}$ on epästabiili systeemissä (1.1).

Tod. Käytetään lausetta 3.1. Olkoon $0 < \delta < r$ mielivaltainen ja $x = x_\delta \in B(\bar{o}, \delta)$ sellainen että $W(x) > 0 = W(\bar{o})$, ja olkoon $x(t) = t \cdot x$ ratkaisu sen kautta. Riittää osoittaa että $x(t) \notin \bar{B}(\bar{o}, r)$ jollakin $t > 0$.

VO: $x(t) \in \bar{B}(\bar{o}, r)$ kaikilla $t \in \Delta(x), t \geq 0$, eli $\gamma^+(x) \subset \bar{B}(\bar{o}, r)$.

Kompaktina joukkona voidaan valita $K = \bar{B}(\bar{o}, r)$; lauseen 3.1 nojalla $t^+(x) = \infty$ ja $x(t) \to \omega(x) = \{\bar{o}\}$. Jatkuvuuden nojalla löytyy sellainen $t_1 > 0$ että

$$\cancel{W(\ldots) \leq |W} \quad W(x(t_1)) \leq |W(x(t_1)) - \underbrace{W(x(0))}_{=0}| < W(x)/2. \quad (*)$$

Väliarvolauseen nojalla löytyy sellainen $0 < \xi < t_1$ että

$$\dot{W}(x(\xi))t_1 = W(x(t_1)) - W(x(0)) \overset{(*)}{<} W(x)/2 - \cancel{W(x)} = -W(x)/2,$$

jolloin $\dot{W}(x(\xi)) < 0$ vastoin pos. semidefiniittisyyttä. ($x(\xi) \in \bar{B}(\bar{o}, r) \subset \Omega$) $\square$

6. <u>Väite</u>. Kun $e > 0$, tasapainotila $\bar{o}$ on epästabiili.

<u>Tod</u>. Kokeillaan L:n lisäfunktiolla $W(x, y) = x^2 y^2$. Tällöin (1) ja (3). Lisäksi $\dot{W}(x, y) = 2e(1 - x^2)y^2 \geq 0$ alueessa $\Omega = \{(x, y) \mid |x| < 1\}$, $\bar{o} \in \Omega$, siis (2).

$N = N_\Omega = \{(x, 0) \mid |x| < 1\}$; kun valitaan $r = 1/2$, niin $\bar{B} = \bar{B}(\bar{o}, \tfrac{1}{2}) \subset \Omega$ ja joukon $N \cap \bar{B}$:n ainoa invariantti osajoukko on $\{\bar{o}\}$:
$y(t) \equiv \dot{y}(t) \equiv 0 \Rightarrow x(t) \equiv 0$. Siis (4). $\square$