Autonomiset systeemit, 2015, harj. 6, ratkaisut

1. Kriittiset pisteet: $\begin{cases}-3x^2+y^2-1=0\\ 2x+y=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-3x^2+4x^2-1=0\\ y=-2x\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x^2=1\\ y=-2x\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\pm 1\\ y=\mp 2\end{cases}$, siis $(1,-2)$ ja $(-1,2)$.

Siirretään origoon muuttujilla $u(t)=x(t)-x_0$, $v(t)=y(t)-y_0$: $(1,-2)$; $u(t)=x(t)-1$, $v(t)=y(t)+2$, jolloin saadaan

$$\dot u = -3(u+1)^2+(v-2)^2-1 = -3u^2-6u-3+v^2-4v+4-1 = -3u^2-6u+v^2-4v$$

$$\dot v = 2(u+1)+(v-2) = 2u+2+v-2 = 2u+v$$, siis ($u \to x$, $v \to y$)

$$\begin{cases}\dot x = -3x^2-6x+y^2-4y\\ \dot y = 2x+y\end{cases}$$

$(-1,2)$; $u(t)=x(t)+1$, $v(t)=y(t)-2$, jolloin saadaan

$$\dot u = -3(u-1)^2+(v+2)^2-1 = -3u^2+6u-3+v^2+4v+4-1 = -3u^2+6u+v^2+4v$$

$$\dot v = 2(u-1)+(v+2) = 2u+v$$, siis ($u \to x$, $v \to y$)

$$\begin{cases}\dot x = -3x^2+6x+y^2+4y\\ \dot y = 2x+y.\end{cases}$$

2. Väite. Tasapainotila $\bar 0$ on asymptoottisesti stabiili.

Tod. Probleeman määrittelyjoukko on $D=\mathbb{R}^2$. (Tavallinen) yrite Ljapunovin funktioksi:

$$V(x,y)=x^2+y^2;$$

Se on pos. definiitti $\mathbb{R}^2$:ssa. Lisäksi derivaatalle pätee

$$\dot V(x,y) = \frac{\partial V}{\partial x}f_1 + \frac{\partial V}{\partial y}f_2 = 2x(-x+y-xy^2)+2y(-2x-y-x^2y) =$$
$$-2x^2+2xy-2x^2y^2-4xy-2y^2-2x^2y^2 = -x^2-(x^2+2xy+y^2)-y^2-4x^2y^2 =$$
$$-x^2-y^2-(x+y)^2-(2xy)^2,$$

joka on selvästi neg. definiitti koko tasossa $\mathbb{R}^2$. Siten $V=x^2+y^2$ on vahva Ljapunovin funktio alueessa $\Omega=\mathbb{R}^2$, ja lauseen 3.2 nojalla tasapainotila $\bar 0$ on asymptoottisesti stabiili. □

2
AS
kev. 6, 2015

Huom. Asymptoottinen stabiilisuus on peräti globaalia.

3. Väite. Tasapainotila $\bar{0}$ on stabiili, muttei asymptoottisesti; säännöllisyysalue on $D = \mathbb{R}^3$.

Tod. Yrite $V(x,y,z) = x^2 + ay^2 + bz^2$, $a, b > 0$. Tällöin V on selvästi pos. definiitti koko $\mathbb{R}^3$:ssa. Derivaatalle pätee

$$\dot{V}(x,y,z) = \frac{\partial V}{\partial x} f_1 + \frac{\partial V}{\partial y} f_2 + \frac{\partial V}{\partial z} f_3 = 2x\left(\tfrac{1}{2} yz\right) + 2ay(-xz) + 2bz(2xy)$$

$= (1 - 2a + 4b)xyz = 0$ kaikilla $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tarkalleen silloin kun $1 - 2a + 4b = 0$. Voidaan valita vaikkapa $a = \frac{5}{2} > 0$ ja $b = 1 > 0$, jolloin $V = x^2 + \frac{5}{2}y^2 + z^2$ on heikko Lyapunovin funktio alueessa $\Omega = \mathbb{R}^3$, ja lauseen 3.2 nojalla tasapainotila $\bar{0}$ on stabiili. $\boxtimes$

Huomio: $\mathbb{R}^3$:n suorat $\{(t,0,0) \mid t \in \mathbb{R}\}$, $\{(0,t,0) \mid t \in \mathbb{R}\}$ ja $\{(0,0,t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ koostuvat kriittisistä pisteistä, siis niitä on kuinka läheltä tahansa origoa. Siten stabiilisuus ei ole asymptoottista. $\square$

Lopuksi myös väitetään: Olkoon $u \in \mathbb{R}^3$ ja $t \mapsto u = (x(t), y(t), z(t))$ systeemin ratkaisu. Tällöin

$\frac{d}{dt} V(u(t)) = \dot{V}(u(t)) = 0$ kaikilla $t \in J(u)$, joten

$V(u(t)) = x(t)^2 + \frac{5}{2} y(t)^2 + z(t)^2 = c$ jollain $c \geq 0$. Kun $u \neq \bar{0}$ eli $c > 0$, niin selvästikin $u(t) \not\to \bar{0}$, eli stabiilisuus ei ole asymptoottista.

Huom. Tasa-arvojoukko $\{V(x,y,z) = c\}$ on kompakti ja rata $\gamma(u)$ sisältyy siihen. Poistumislauseen nojalla $J(u) = \mathbb{R}$.

4. Väite. Tasapainotila $\bar{0}$ on asymptoottisesti stabiili.

Tod. Parin säännöllisyysalue on $D = \mathbb{R}^2$.

3
AS
kevät-6, 2017

Yritė $V(x,y)=x^2+y^2$; se on pos. definiitti koko $\mathbb{R}^2$:ssa. Derivaatalle pätee

$$\dot V(x,y)=2x(-4x+y+x^3)+2y(-x+x^2y)=-8x^2+2x^4+2x^2y^2=$$
$$-2x^2(4-x^2-y^2)\le 0 \text{ kaikilla } x^2+y^2<4$$

Siten V on heikko Lyapunovin funktio alueessa $\Omega=B(\bar 0,2)=\{(x,y)\mid x^2+y^2<4\}$.

Sovelletaan lauseen 3.2 kohtaa (b): $\bar B(\bar 0,1)=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 1\}\subset\Omega$ ja $N_\Omega\cap\bar B(\bar 0,1)=\{(0,y)\mid y\in[-1,1]\}$.

Olkoon $z=(0,y)$ tämän joukon invariantin osajoukon piste. Tällöin $t\cdot z=(0,y(t))$, joten $x(t)=\dot x(t)=0 \Rightarrow y(t)=0 \Rightarrow z=\bar 0$.

Siten ainoa invariantti osajoukko on yksiö $\{\bar 0\}$, ja väite seuraa lauseen 3.2 kohdasta (b). $\square$

5. Väite. Tasapainotila $\bar 0$ on globaalisti asymptoottisesti stabiili.

Tod. Poein säännöllisyysalue on $D=\mathbb{R}^2$.

Yritė $V(x,y)=x^2+ay^2$, $a>0$; se on pos. definiitti koko tasossa $\mathbb{R}^2$. Derivaatalle pätee

$$\dot V(x,y)=2x(-x+2y^2)+2ay(-y-3xy)=-2x^2+4xy^2-2ay^2-6axy^2$$
$$=-2x^2-2ay^2+(4-6a)xy^2,$$

joten valitaan $4-6a=0 \Leftrightarrow a=\frac{2}{3}>0$, jolloin $\dot V(x,y)=-2x^2-\frac{4}{3}y^2$ on neg. definiitti koko tasossa $\mathbb{R}^2$,

Tässä siis $V=x^2+\frac{2}{3}y^2$ on vahva Lyapunovin funktio. Lauseen 3.2 kohdan (c) nojalla $\bar 0$ on asymptoottisesti stabiili. $\square$

Globaalisuus: Tarkastellaan aluetta

$$E_c=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid V(x,y)=x^2+\tfrac{2}{3}y^2<c\}.$$ Sen

reunan ∂E_c, tasa-arvokäyrän $V(x,y)=x^2+\frac{2}{3}y^2=c$, ulkonormaali on

4
AS
huhti-6, 2015

$\nabla V(x,y) = \left(2x, \frac{4y}{3}\right)$, ja juuri
Itse asiassa käytetään ellei lauseessa reunan ∂E_c pisteissä (x,y) pätee

$$\nabla V(x,y) \cdot f(x,y) = \dot V(x,y) < 0.$$

Voidaan siis käyttää lausetta 1-1, ja sen nojalla alue E_c, $c>0$, on positiivisesti invariantti.

Olkoon nyt $z=(x,y)\in\mathbb{R}^2$; valitaan $c > V(z)$, jolloin $z \in E_c$. Edellisen nojalla $\varphi_t z \in E_c \subset \overline{E}_c$ kaikilla $t\in\Delta(z)$, $t\geq 0$. Koska $\overline{E}_c$ on selvästi kompakti, lauseella 3-1 voidaan soveltaa joukkoon $K=\overline{E}_c$. Sen nojalla $t^+(z)=\infty$ ja $\omega(z)\,(\neq\emptyset)$ on $N\cap\overline{E}_c$:n invariantti osajoukko. Toisaalta, koska $\dot V$ on neg. definiitti $\mathbb{R}^2$:ssa, niin $N=\{0\}$. Siten

$$\varphi_t z \to \omega(x) = \{0\},$$

siis asymptoottinen stabiilisuus on globaali. □