Autonomiset systeemit, 2015, harjoitus 5, ratkaisut

1. Ol. $x \in O$, $\gamma^+(x) \cap \omega(x) \neq \emptyset$.

(a) Väite. $t^+(x) = \infty$.

Tod. Tunnetusti, jos $t^+(x) < \infty$, niin $\omega(x) = \emptyset$, mutta oletuksen nojalla $\omega(x) \neq \emptyset$. □

(b) Väite. $\gamma(x) \subset \omega(x)$.

Tod. Olkoon $y = t_0 \cdot x \in \gamma^+(x) \cap \omega(x)$ jollain $t_0 \geq 0$.
Tällöin $\exists\, -t_0 \cdot y = -t_0 \cdot (t_0 \cdot x) \overset{(L(3))}{=} (-t_0 + t_0) \cdot x = 0 \cdot x = x \in \omega(x)$,
koska lauseen 1.4 kohdan (c) nojalla $\omega(x)$ on invariantti.
Olkoon $t \in I(x)$; samasta syystä $t \cdot x \in \omega(x)$,
siis $\gamma(x) \subset \omega(x)$. □

2. Lasketaan matriisin A ominaisarvot:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 & 0 \\ 0 & -\lambda & -1 \\ -8 & 14 & -7-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 14 & -7-\lambda \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -8 & -7-\lambda \end{vmatrix} =$$

$-\lambda^3 - 7\lambda^2 - 14\lambda - 8 = 0$; kokeilemalla saadaan
$\lambda_1 = -1$, jolloin $-(\lambda+1)(\lambda^2 + 6\lambda + 8) = 0$, josta
muut ominaisarvot $\lambda_2 = -2$ ja $\lambda_3 = -4$.

Koska kaikki ominaisarvot ovat negatiivisia, lauseen 2.1 nojalla HS $\dot{x} = Ax$ on asymptoottisesti stabiili (siis sen kaikki ratkaisut ovat as. stabiileja).

Huom. HS:n PJ-R:ssä on $(e^{\lambda_1 t}\bar{u}_1, e^{\lambda_2 t}\bar{u}_2, e^{\lambda_3 t}\bar{u}_3)$
$= \left(e^{-t}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}, e^{-2t}\begin{bmatrix}1\\2\\4\end{bmatrix}, e^{-4t}\begin{bmatrix}1\\4\\16\end{bmatrix}\right)$.

3. Kirjoitetaan $z = (x, y)$ ja $A = \begin{bmatrix} 1 & c \\ -c & -1 \end{bmatrix}$, jolloin

2
4S
läy. 5, 2015

linearisoituna pari voidaan kirjoittaa

$\dot{z} = Az + \begin{bmatrix} f(t) \\ g(t) \end{bmatrix}$. Sen stabiilisuuden laatu määräytyy vastaavasta LHS:stä $\dot{z} = Az$.

(a) Väite. Pari on stabiili kun $|c|>1$.

Tod. $\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & c \\ -c & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 + c^2 = 0 \Leftrightarrow$

$\lambda = \pm\sqrt{1-c^2}$.

Kun $|c|>1$, niin $1-c^2<0$ ja $\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{c^2-1} \in \mathbb{C}$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ja $\mathrm{Re}(\lambda_{1,2}) = 0$. Lauseen 2.1 nojalla pari on stabiili (vaan ei asympt. stabiili) □

(b) Väite. Pari on epästabiili kun $|c|<1$.

Tod. Kun $|c|<1$, niin $1-c^2>0$ ja $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{1-c^2} \in \mathbb{R}$, erimerkkiset (toinen positiivinen). Lauseen 2.1 nojalla pari on epästabiili. □

Huom. Kun $|c|=1$, pari on epästabiili, mikä seuraa lemmasta 2.1.

4. Ol. Kaikkien matr. A om. arvojen reaaliosat negatiiviset, $t_0 \in \mathbb{R}$.

Väite. Tällöin $\exists\, M, m > 0$ s.e. $\dot{x} = Ax$ perusmatriisille (pm.) $X(t)$ pätee $\|X(t)\| \le M e^{-mt}$ kaikilla $t \ge t_0$.

Tod. Olkoot A:n ominaisarvot $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ ja niitä vastaavat, mahdollisesti yleistetyt, ominaisvektorit $u_1, \dots, u_n \in \mathbb{C}^n$, joista saadaan vapaa jono. Tunnetusti saadaan pj:n funktiot (mahd. kompleksiset)

$$x_k(t) = e^{\lambda_k t} p_k\big(t(A-\lambda_k I)\big) u_k, \quad 1 \le k \le n,$$

jossa p_k:t ovat polynomeja matriisista $t(A-\lambda_k I)$, jaavalutun ominaisarvojen kyroutessa $p_e \equiv 1$ (DY:n, erityisesti yhtälö (5.32)).

Olkoon $-m_0 = \max\limits_{1\le k\le n} \operatorname{Re}(\lambda_k) < 0$. Koska

$\mathbb{X}(t) = [x_1(t) \cdots x_n(t)]$, niin $\|\mathbb{X}(t)\|^2 \le \|\mathbb{X}(t)\|^2_{Fr} \le e^{-2m_0 t} p(t)$, (*)

jossa p on eräs polynomi (vakio, jos vain kompleksisia ominaisarvoja).

Valitaan $0 < m < m_0$. Tunnetusti $e^{2(m-m_0)t} p(t) \to 0$, kun $t \to \infty$, joten $e^{-2m_0 t} p(t) \le M^2 e^{-2mt}$ jollakin $M > 0$ ja kaikilla $t \ge t_0$. Kohdan (*) nojalla

$\|\mathbb{X}(t)\| \le M e^{-mt}$ kaikilla $t \ge t_0$. □

5. Merk. $z = (x, y)$, $A = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ ja $B(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}$.

Tällöin syst. voidaan kirjoittaa

$\dot z = (A + B(t)) z$.

Väite. Se on asymptoottisesti stabiili.

Tod. Vakiomatriisin A ominaisarvot: $\det(A - \lambda I) =$

$\begin{vmatrix} -\lambda & -2 \\ 3 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda + 6 = 0 \iff \lambda = \frac{-2 \pm \sqrt{-20}}{2} = -1 \pm i\sqrt{5} \in \mathbb{C}$,

$\operatorname{Re}(\lambda) = -1 < 0$.

Matriisin $B(t)$ pienuus suuresta t: Voi valita $t_0 = 0$.

Koska $\|B(t)\| \le \|B(t)\|_{Fr} = (e^{-2t} + e^{-4t})^{1/2} = e^{-t}(1 + e^{-2t})^{1/2} \le 2e^{-t}$,

niin $\int_0^\infty \|B(t)\| dt \le 2\int_0^\infty e^{-t} dt = -2\Big/_0^\infty e^{-t} = 2 < 0$.

Voi soveltaa Lausetta 2.2, josta väite seuraa. □

6. Väite. DY:n kaikki ovat asymptoottisesti stabiileja, kun $a > 0$.

Tod. Sijoitus $x(t) = u(t)$, $y(t) = \dot u(t)$ palauttaa 1 kl. lineaariseksi pariksi

$$\begin{cases} \dot x = y \\ \dot y = \ddot u = -a\dot u - au - \frac{cu}{(1+t)^2} + f(t) = -ax - ay - \frac{cx}{(1+t)^2} + f(t) \end{cases}$$

Merkitään vielä $z=(x,y)$, $A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -a & -a\end{bmatrix}$, $B(t)=\begin{bmatrix}0 & 0\\ \frac{-c}{1+t^2} & 0\end{bmatrix}$ ja $\bar{f}(t)=\begin{bmatrix}0\\ f(t)\end{bmatrix}$. Tällöin

4
DE
kev.-1, 2015

DY voidaan kirjoittaa

$$\dot{z}=(A+B(t))z+\bar{f}(t); \qquad (*)$$

homogeenisesti sen, ja samalla alkuperäisen DY:n, stabiilisuus saadaan vastaavasta DS:stä $\dot{z}=(A+B(t))z$. $(**)$

Vakiomatriisin A ominaisarvot: $\det(A-\lambda I)=$
$\begin{vmatrix}-\lambda & 1\\ -a & -a-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2+a\lambda+a=0 \Leftrightarrow \lambda=\frac{-a\pm\sqrt{a^2-4a}}{2}$

Jos $a\geq 4$, niin $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$ ja $\lambda_1,\lambda_2<0$.

Jos $0<a<4$, niin $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{C}$ ja $\mathrm{Re}(\lambda_{1,2})=-\frac{a}{2}<0$.

$\circledast$ Voi siis käyttää lausetta 2.2: sen nojalla DS $(**)$ on asympt. stabiili. Siten myös $(*)$ kaikki ratkaisut ovat asympt. stabiileja, mikä määritelmän mukaisesti kertoo alkuperäisen DY:n ratkaisut as. stabiileiksi. $\square$

$\circledast$

B:n pienuus:

$\|B(t)\|=\frac{|c|}{1+t^2}$, joten

$$\int_0^\infty \|B(t)\|\,dt=|c|\int_0^\infty\frac{dt}{1+t^2}<\infty.$$