Autonomiset systeemit, 2015, harjoitus 4, ratkaisut. (1)

1. Ol. $cl_D(\gamma^+(x))$ kompakti (tällöin $t^+(x)=\infty$).

Väite. Kaikilla $y\in\omega(x)$ pätee $\Delta(y)=\mathbb{R}$.

Tod. Koska $t^+(x)=\infty$, lauseen 1.4 kohtia (c) ja (e) voi käyttää: niiden nojalla $\omega(x)$ on invariantti ja kompakti.

Olkoon $y\in\omega(x)$. Invarianttiuden nojalla $\gamma(y)\subset\omega(x)$. Koska $\omega(x)$ on kompakti ja $\omega(x)\subset D$, poistumislausetta (tai lemmaa 1.1) voi käyttää: $\Delta(y)=\mathbb{R}$. $\square$

2. Ol. $t^+(x)=\infty$.

Väite. $cl_D(\gamma^+(x))=\gamma^+(x)\cup\omega(x)$.

Tod. Tunnetusti $\gamma^+(x)\subset cl_D(\gamma^+(x))$, ja kun $t>0$, inkluusiojonon (1.18) nojalla

$$\omega(x)\subset cl_D(\gamma^+(t\cdot x))\subset cl_D(\gamma^+(0\cdot x))=cl_D(\gamma^+(x)).$$

Siten

$$\gamma^+(x)\cup\omega(x)\subset cl_D(\gamma^+(x)). \qquad (1)$$

Kääntäen, olkoon $y\in cl_D(\gamma^+(x))$. Käänteisen inkluusion osoittamiseksi riittää olettaa että $y\notin\gamma^+(x)$, ja osoittaa että silloin $y\in\omega(x)$.

Jokaisella $k\in\mathbb{N}_+$ ratkaisufunktion $x(t)=t\cdot x$ kuvajoukko $x([0,k])$ on kompakti ja siten suljettu (kompaktin joukon jatkuva kuva on kompakti, Topo I). Koska $y\notin x([0,k])\subset\gamma^+(x)$, mutta $y\in cl_D(\gamma^+(x))$, löytyy sellainen r_k että

$$0<r_k\le 1/k \text{ ja } B(y,r_k)\cap x([0,k])=\emptyset, \qquad (2)$$

ja sellainen t_k että $t_k\cdot x=x(t_k)\in B(y,r_k)\subset B(y,1/k)$. Kohdan (2) nojalla $t_k>k$. Näistä t_k saadaan aikajono (t_k), jolle pätee $t_k\to\infty$ ja $t_k\cdot x\to y$. Lauseen 1.4 kohdan (a) nojalla $y\in\omega(x)$, siis

$$d_D(g^+(x)) \subset g^+(x) \cup \omega(x). \quad (3)$$

Väite seuraa kohdista (1) ja (3). □

2
AS
heinä 4, 2015

3. Väite. Operaattorinormille pätee $\|AB\| \le \|A\|\|B\|$.

Tod. Olkoon $x \in S^{n-1}$, siis $\|x\| = 1$. Tällöin lauseen kohdan (2) nojalla

$$\|(AB)x\| = \|A(Bx)\| \le \|A\|\|Bx\| \le \|A\|\|B\|\|x\| = \|A\|\|B\|,$$

joten $\|AB\| = \sup_{\|x\|=1} \|(AB)x\| \le \|A\|\|B\|$. □

4. Väite. (Eukliidiselle) operaattorinormille pätee $\|A\| \le \|A\|_{Fr}$.

Tod. Olkoon $x \in S^{n-1}$, siis $\|x\| = 1$. Tällöin

$$\underbrace{\|Ax\|}_{\text{vektorin}}^2 = \sum_{i=1}^{n} |\overset{\text{pistetulo}}{a_{i*} \cdot x}|^2 \overset{\text{2 Schwarz}}{\le} \sum_{i=1}^{n} \|a_{i*}\|^2 \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|a_{i*}\|^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2 = \|A\|_{Fr}^2 ,$$

joten $\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| \le \|A\|_{Fr}$. □

5. Kyseinen DY on $\dot{x} = x^2 - x^3 = f(x)$. Olkoon $x(t) = t \cdot x$ sen ratkaisu, jolle $x(0) = x \in \mathbb{R}$.

(a) Väite. Ratkaisu $x(t)$ on asymptoottisesti stabiili, kun $x < 0$.

Tod. Koska stabiilisuus on lokaali käsite, "häiritty" alkuehdoksi voidaan valita $y < 0$. Olkoon $y(t) = t \cdot y$ vastaava DY:n ratkaisu, $y(0) = y$. Yleisyyttä menettämättä voidaan olettaa $x < y < 0$. Tiedetään, että ratkaisut ovat kangissa $+\infty$:ään.

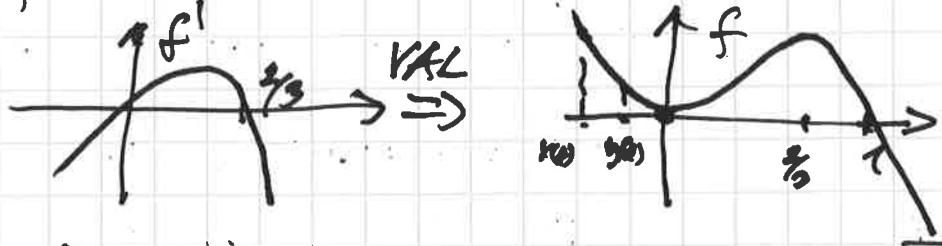
Tutkitaan funktiota $h(t) = |x(t) - y(t)|$. Koska voidaan soveltaa lokaalia OY-lausetta ja $x(0) = x < y = y(0) < 0$, niin $x(t) < y(t) < 0$ kaikilla $t \in \mathbb{R}$. Siten

$$h(t) = y(t) - x(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Toisaalta funktio $f(x)$ on vähenevä välillä $]-\infty, 0]$.

$f'(x) = 2x - 3x^2 = x(2-3x)$

3
AS
hav. 4, 2015



Siten $\dot h(t) = \dot y(t) - \dot x(t) = f(y(t)) - f(x(t)) < 0$, koska $x(t) < y(t) < 0$.

Väliarvolauseen nojalla funktio h on vähenevä, erityisesti $|x(t) - y(t)| = h(t) \leq |x(0) - y(0)| = |x-y|$, joten $x(t)$ on stabiili ($\varepsilon > 0 \Rightarrow \delta = \varepsilon$ määritelmässä).

Lisäksi harjoitusten 1 nojalla $\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{t\to\infty} y(t) = 0$, joten $|x(t) - y(t)| \to 0$, stabiilisuus on siis asymptoottista. ◻

(b) <u>Väite</u>. Ratkaisu $x(t)$ on epästabiili kun $x = 0$.

<u>Tod</u>. Nyt $x(t) \equiv 0$. Olkoon $\varepsilon \in]0,1[$, vaikka $\varepsilon = 1/2$. Olkoon $\delta > 0$ ja $y = \delta/2$. Tunnetusti $\lim_{t\to\infty} y(t) = 1$. Siten löytyy sellainen t jolla

$$|x(t) - y(t)| = |y(t)| > \frac{1}{2} = \varepsilon, \text{ vaikka } |x-y| < \delta,$$

ja tämä pätee kaikille $\delta > 0$. Määritelmän nojalla $x(t) \equiv 0$ on epästabiili ratkaisu. ◻

6. <u>Väite</u>. Pari on epästabiili.

<u>Tod</u>. Lemmasta 2.1 välittömästi seuraa että lineaarinen homogeenisysteemi on stabiili täsmälleen silloin, kun kaikki sen ratkaisut ovat rajoitettuja funktioita ajassa äärettömään päin.

Ratkaisulle $x(t) = (e^{-t}, e^{t})$ kuitenkin pätee $\|x(t)\| \to \infty$ kun $t \to \infty$. Siten pari ei ole stabiili (vaan epästabiili). ◻