Autonomiset systeemit, 2015, harjoitus 3, ratkaisut.

1. Merk. $f(x,y)=(f_1(x,y),f_2(x,y))=(-2x+y,\ x-y)$.
Selvästi $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2\in C^1(\mathbb{R}^2)$, siis f on C^1-funktio $\mathbb{R}^2$:ssa ja siten lokaalisti Lipschitz siinä.

Tarkastellaan avointa kuulaa $B(\bar{0},r)$, $r>0$, ja osoitetaan se positiivisesti invariantiksi. Kuulan reuna $S(\bar{0},r)=\{z\in\mathbb{R}^2 \mid \|z\|=r\}$, ympyrä, on selvästi säännöllinen käyrä (2-monisto), ja sen ulkonormaalina pisteessä $z=(x,y)\in S(\bar{0},r)$ toimii

$n(z)=z$. Lisäksi pätee

$$n(z)\cdot f(z)=(x,y)\cdot(-2x+y,x-y)=-2x^2+xy+xy-y^2-x^2$$
$$-(x^2-2xy+y^2)=-x^2-(x-y)^2<0 \quad \text{kaikilla } z\in S(\bar{0},r).$$

Kuulaan $B(\bar{0},r)$ voidaan siis soveltaa lausetta 1.1: sen nojalla se on positiivisesti invariantti systeemin $\dot{z}=f(z)$ suhteen.

Olkoon $z\in\mathbb{R}^2$. Valitaan sellainen $r>0$ että $z\in B(\bar{0},r)$. Kuulan pos. invarianttisuuden nojalla

$\gamma^+(z)\subset B(\bar{0},r)$: rata eteenpäin on rajoitetussa joukossa.

Lisäksi, koska $\bar{B}(\bar{0},r)=\{z\in\mathbb{R}^2 \mid \|z\|\le r\}\subset D=\mathbb{R}^2$ ja on tunnetusti kompakti (rajoitettu ja suljettu) joukko, voidaan soveltaa lausetta 1.1 tai yleisempää jatkumislausetta: $t^+(z)=\infty$ eli $[0,\infty[\subset\Delta(z)$.

Huom. Perin yleinen ratkaisu on muotoa

$$z(t)=c_1e^{\lambda_1 t}[\,\vdots\,]+c_2e^{\lambda_2 t}[\,\vdots\,],\ c_1,c_2\in\mathbb{R};\ \lambda_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}<0.$$

Siten $z(t)\to\bar{0}$ kun $t\to\infty$. Radat taaksepäin eivät kuitenkaan ole rajoitettuja joukkoja (paitsi $\bar{0}$).

2. Väite. $x_\infty=\lim_{t\to\infty}x(t)\in D$ on kriittinen piste.

Tod. Koska funk. $f:D\to\mathbb{R}^n$ on jatkuva,
$\exists\ \dot{x}_\infty=\lim_{t\to\infty}\dot{x}(t)=\lim_{t\to\infty}f(x(t))=f(\lim_{t\to\infty}x(t))=f(x_\infty)$.

Sovelletaan kurssin DYI (lause 2.1) komponenteihin $x_k(t)$, $1 \le k \le n$. Saadaan $\dot{x}_\infty = \bar{0}$. Siten

$$f(x_\infty) = \dot{x}_\infty = \bar{0},$$ joten x_∞ on systeemin kriittinen piste. ◻

2 AS harj. 3 6.2015

3. Lokaalin OY-lauseen ja Poincarén lauseen oletukset toteutuvat (ehkä avoimen $\mathbb{R}\times O$)

Väite. $\Delta(x) = \mathbb{R}$ ja $(t+T)\cdot x = t\cdot x$ kaikilla $t \in \mathbb{R}$. (1.12)

Tod. Olkoon $x(t) = t\cdot x$; määritellään $y: \Delta(x) - T \to \mathbb{R}^n$,

$$y(t) = x(t+T) = (t+T)\cdot x.$$

Tällöin $\dot{y}(t) = \dot{x}(t+T) = f(x(t+T)) = f(y(t))$, joten myös $y(t)$ on (1.1):n ratkaisu. Lisäksi $y(0) = x(T) = x(0)$ $(=x)$, joten saman AAT:n ratkaisuna sille OY-lauseen nojalla on yksikäsitteisyyden nojalla pätee

$$(t+T)\cdot x = y(t) = x(t) = t\cdot x \text{ kaikilla kelvollisilla } t. \quad (*)$$

Olkoon $t \in \Delta(x)$. Tällöin löytyy sellaiset $s \in [0, T[$ ja $k \in \mathbb{N}$ että $t = s \pm kT$ (ns. jakoyhtälö). Yhtälöstä $(*)$ saadaan induktiolla

$$x(t) = x(s \pm kT) = x(s \pm (k-1)T) = \cdots = x(s) \in x([0,T]).$$

Siten $\gamma(x) \subset x([0,T]) \subset O$, jossa $x([0,T])$ on kompaktin joukon $[0,T]$ jatkuvana kuvana kompakti (Topo I). Voidaan soveltaa Poincarén lausetta: sen nojalla $\Delta(x) = \mathbb{R}$. Siten erityisesti $(*)$ pätee kaikilla $t \in \mathbb{R}$. ◻

Huom. Funktiot x ja y yhtyvät, erityisesti niiden (maksimaaliset) määrittelyvälit ovat samat: $\Delta(x) = \Delta(x) - T$. Tämä on selvästikin mahdollista vain kun $\Delta(x) = \mathbb{R}$.

3
KS
harj. 3, 6.2017

4. Väite. $\omega(x) = \{x_\infty\}$.

Tod. Koska $x_\infty = \lim_{t\to\infty} x(t) \in O$, niin erityisesti aikajonolle (t_k), jossa $t_k = k$, pätee $t_k \to \infty$ ja $t_k \cdot x = x(t_k) \to x_\infty$. Lauseen 1.4 kohdan (a) nojalla $x_\infty \in \omega(x)$.

Kääntäen, olkoon $y \in \omega(x)$. Saman kohdan (a) nojalla löytyy sellainen aikajono (t_k) että $t_k \to \infty$ ja $t_k \cdot x \to y$. Siten

$$y = \lim_{k\to\infty} x(t_k) = \lim_{t\to\infty} x(t) = x_\infty.$$

Kaikkiaan $\omega(x) = \{x_\infty\}$. $\square$

Huom. Väite seuraa myös suoraan rajajoukon $\omega(x)$ määritelmästä.

5. Harjoitustehtävästä 1 osoitettiin, että

$$\exists \lim_{t\to\infty} x(t) = \begin{cases} 1, & \text{kun } x = x(0) > 0, \\ 0, & \text{kun } x \le 0. \end{cases}$$

(a) Edellisen tehtävän nojalla

$$\omega(x) = \begin{cases} \{1\}, & \text{kun } x > 0, \\ \{0\}, & \text{kun } x \le 0. \end{cases}$$

(b) Edellisen kohdan ja harjoituksen 1 nojalla

$\gamma(1) = \{1\} = \omega(1)$, $\gamma(0) = \{0\} = \omega(0)$ ja $\gamma(x) \cap \omega(x) = \emptyset$ aina kun $x \notin \{0, 1\}$