Autonomiset systeemit, 2015, luj. 12, ratkaisut (1)

1. Väite. Origon ulkopuolella $(4.5) \Leftrightarrow (4.6)$.

Tod. Merkitään $z = (x,y)$, $r = \|z\|$, funktiot napakoordinaateissa

$$\begin{cases} x(t) = r(t)\cos\phi(t) \\ y(t) = r(t)\sin\phi(t) \end{cases}, \quad r(t) = \|z(t)\| = \left(x(t)^2 + y(t)^2\right)^{1/2}, \quad \phi(t) = \arctan\frac{y(t)}{x(t)},$$

joka on derivoituva kun $x(t) \neq 0$.

Esitykset:

$$\begin{cases} \dot{x} = x g(r) - y \\ \dot{y} = x + y g(r) \end{cases} \quad (4.5), \qquad \begin{cases} \dot{\phi} = 1 \\ \dot{r} = r g(r) \end{cases} \quad (4.6).$$

Päteköön (4.6) pisteessä $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Tällöin

$$\dot{x} = \dot{r}\cos\phi - r\sin\phi\,\dot{\phi} \overset{(4.6)}{=} r g(r)\cos\phi - r\sin\phi = x g(r) - y \quad \text{ja}$$

$$\dot{y} = \dot{r}\sin\phi + r\cos\phi\,\dot{\phi} = r g(r)\sin\phi + r\cos\phi = x + y g(r), \quad \text{siis (4.5).}$$

Käänteisesti, päteköön (4.5) pisteessä $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Tällöin

$$\dot{r} = \frac{d}{dt}\left(x^2+y^2\right)^{1/2} = \frac{x\dot{x} + y\dot{y}}{r} \overset{(4.5)}{=} \frac{x(xg(r) - y) + y(x + y g(r))}{r} = \frac{(x^2+y^2)g(r)}{r} = r g(r) \quad (4.6)$$

$$x g(r) - y\dot{\phi} = r g(r)\cos\phi - r\sin\phi\,\dot{\phi} \overset{(4.6)}{=} \dot{r}\cos\phi - r\sin\phi\,\dot{\phi}$$

$$= \frac{d}{dt}(r\cos\phi) = \dot{x} \overset{(4.5)}{=} x g(r) - y \Leftrightarrow y\dot{\phi} = y \Leftrightarrow \dot{\phi} = 1, \quad \text{siis (4.6).} \ \square$$

2. (a) Väite. $\omega(z) \not\subset C$.

Tod. VO: $\omega(z) \subset C$. Olkoon $w \in \omega(z)$ ja $t \cdot w = (x(t), y(t))$ ratkaisu sen kautta. Rajajoukon $\omega(z)$ invarianttisuuden nojalla $t \cdot w \in \omega(z) \subset C$ kaikilla t $(\in \mathbb{R})$. Siten

$$4x(t)^2 + y(t)^2 = 4, \ (1) \quad \text{ja derivoimalla} \quad 8x\dot{x} + 2y\dot{y} = 0 \ (2).$$

Toisaalta pisteen ratkaisuna pätee

$$\dot{x} = y \ \text{ja} \ \dot{y} = -x^3 - (4x^2+y^2-4)y \overset{(1)}{=} -x^3 \ (3), \ \text{ja sijoittamalla}$$

$$0 \overset{(2)}{=} 8x\dot{x} + 2y\dot{y} \overset{(3)}{=} 8xy - 2x^3y = 2xy(4 - x^2),$$

joten pätee $x(t) \equiv 0$ tai $y(t) \equiv 0$ tai $x(t) \equiv \pm 2$. Helposti nähdään, ettei mikään vaihtoehdoista kuitenkaan toteuta t:n kaikilla arvoilla yhtä aikaa yhtälöä (1) ja tehtävän paria. Siis väite. $\square$

2
AS
hay. 12, 2015

(b) <u>Väite.</u> $\omega(z) \not\subset N = C \cup \{(x,0) \mid x \in \mathbb{R}\}$.

<u>Tod.</u> Valinnan (a) nojalla riittää tarkastella pistettä $w = (x,0) \in \omega(z) \cap \{(x,0)\}$, ja osoittaa että siitä alkava ratkaisu φ-n ei ole aikavälillä $[0, t_1[$ muotoa $(x(t), 0)$. VO, tällöin erityisesti $x \neq 0$, koska $\bar{0} \in K$. Lisäksi $y(t) \equiv 0$, $\dot{y}(t) \equiv 0$, joten yht. 2. yhtälöstä $x(t) \equiv 0$, erityisesti $x = x(0) = 0$. ↯. □

<u>Huom.</u> Kohdat (a) ja (b) samalla osoittavat että N:n ainoa invariantti osajoukko on yksiö $\{\bar{0}\}$.

<u>3.</u> Lause 3.1 edellyttää että tarkasteltava rata $\gamma^+(z)$ kulkee kompaktissa joukossa, jossa derivaatta $\dot{V}$ on yhdenmerkkinen. Tehtävän 2 tai esimerkin 4.2 rengas K <u>ei</u> ole tällainen joukko!

<u>Huom.</u> Välttämättä $\omega(K) \cap C \neq \emptyset$, laskematta vieläpä aidosti ristiin. Miksi?

<u>4.</u> <u>Väite.</u> Tehtävän parilla on periodinen ratkaisuja.

<u>Tod.</u> Ensinnäkin ainoa kriittinen piste on $\bar{0}$, kuten helposti tulee osoitettua (näkyy myös suoraan laskuista). Yrite Lyapunovin funktio-kandidaatiksi

$$V(z) = x^2 + y^2 \in C^1(\mathbb{R}^2), \text{ pos. def. } \mathbb{R}^2\text{:ssa},$$

$$\dot{V}(z) = 4x^2 - 2xy - 2x^2\|z\| + 2xy + 4y^2 - 2y^2\|z\| = 4(x^2+y^2) - 2(x^2+y^2)\|z\| = 4\|z\|^2 - 2\|z\|^3 = 2\|z\|^2(2 - \|z\|).$$

Siten

$$\dot{V}(z) > 0, \quad \text{kun } z \in B(\bar{0}, 2),$$

$$\dot{V}(z) < 0, \quad \text{kun } z \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{B}(\bar{0}, 2), \text{ ja}$$

$$\dot{V}(z) = 0, \quad \text{kun } z \in S^1(\bar{0}, 2) \cup \{\bar{0}\}$$

Monesti käytetyllä päättelyllä, perustuen välitulosaiheeseen, nähdään että kompakti rengas

$K = \overline{B}(\bar 0, 3) \setminus B(\bar 0, 1)$
on positiivisesti invariantti. Tämä seuraa myös lauseesta 4.1 (sen alkuosasta); huomaa että reunan sisäänpäin ulkonormaali on $n = -z$, joukon $S^1(\bar 0,3)$ ja $S^1(\bar 0,1)$ V:n tasa-arvojoukoilla $-f\cdot n = -\dot V(z) < 0$.

Koska $\dot V(z) = 0$ kriittisessä pisteessä, samalla huomataan että tällöin $\|z\| = 0$ tai $\|z\| = 2$, ja tämä puoli systeemistä saadaan $-y = x = 0 \iff z = \bar 0$. Siten K:ssa ei ole kriittisiä pisteitä!

Olkoon $z \in K$, jolloin $\omega(z) \subset K$, ja voidaan soveltaa Poincarén–Bendixsonin lausetta: sen nojalla $\omega(z)$ on periodinen rata, mikä piti todistaa.

Huom. Myös kaikilla $z \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\bar 0\}$ joukko $\omega(z)$ on periodinen rata.

5. **Väite.** Pantaa ei ole periodisia ratkaisuja.

Tod. Selvästi $f = (x^2 - xy, -x^2) \in C^1(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$, joten yhdesti yhtenäiseksi alueeksi voidaan valita $G = \mathbb{R}^2$. Käytetään Bendixsonin laajennettua kriteeriä ja valitaan
$$u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \in C^1(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}),\quad u(x,y) = y,$$
jolloin
$$\nabla\cdot(uf) = \nabla\cdot(x^2y - xy^2, -x^2y) = \frac{\partial}{\partial x}(x^2y - xy^2) + \frac{\partial}{\partial y}(-x^2y)$$
$$= 2xy - y^2 - x^2 = -(x-y)^2 \le 0 \text{ kaikilla } (x,y) \in \mathbb{R}^2$$
ja $\nabla\cdot(uf) = 0$ vain $\mathbb{R}^2$:n nollamittaisessa joukossa, suoralla $\{(x,y) \mid x = y\}$.

Väite seuraa nyt lauseesta 4.4 eli Bendixsonin laajennetusta kriteeristä. $\square$

Huom. Sen sijaan tasapainotiloja on: kriittiset pisteet ovat $\{(0,y) \mid y \in \mathbb{R}\}$.