Autonomiset systeemit, 2015, harjoitus 11, ratkaisut. (1)

1. Alempi oikea puoli on reaalisesti nolla ainoastaan kun $1-y=0 \iff y=1$; sijoitetaan ylempään, jolloin saadaan $-3x=0 \iff x=0$. Siten on tasan yksi kriittinen piste $(x,y)=(0,1)$.

$f \in C^1(\mathbb{R}^2)$, linearisoidaan derivaattamatriisin avulla:

$$(Df)(x,y) = \begin{bmatrix} -3 & 12(y-1) \\ 2x(1-y) & -(2+x^2) \end{bmatrix}, \text{ erityisesti}$$

$$A=(Df)(0,1) = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad \det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} -3-\lambda & 0 \\ 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} =$$

$(3+\lambda)(2+\lambda)=0 \iff \lambda_1=-3, \lambda_2=-2 \in \mathbb{R}$, negatiiviset. Voidaan käyttää lausetta 3.9, ja sen nojalla tasapainotila eli kr. piste $(0,1)$ on asympt. stabiili.

2. Väite. Tasapainotila $\bar{0}$ on asympt. stabiili ja $\Psi=\mathbb{R}^2$.

Tod. $f\in C^1(\mathbb{R}^2)$, $D=\mathbb{R}^2$, linearisoidaan derivaattamatriisin avulla:

$$(Df)(x,y) = \begin{bmatrix} -3x^2-1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \text{ erityisesti } A=(Df)(\bar{0})=\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2+\lambda+1=0 \iff \lambda=-\frac{1}{2}\pm i\sqrt{3}\in\mathbb{C}$, $\mathrm{Re}(\lambda)=-\frac{1}{2}<0$. Voidaan käyttää lausetta 3.9, ja sen nojalla $\bar{0}$ on asympt. stabiili.

Linearisoinnin pohjalta $\dot{z}=Az=\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}z$ toimii Lyapunovin funktio $V(x,y)=x^2+y^2$, kokeillaan sitä koko pääin:

$\dot{V}(x,y)=2x(-x^3-x+y)+2y(-x) = -2x^4-2x^2 = -2x^2(x^2+1)\le 0$ kaikilla $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. V siis toimii heikkona L:n funktiona alueessa $\Omega=\mathbb{R}^2$. Lisäksi

$$N=\{(x,y) \mid -2x^2(x^2+1)=0\} = \{(0,y) \mid y\in\mathbb{R}\}.$$

Olkoon $z=(0,y)$ joukon N invariantin osajoukon piste

2
AS
hav.-11, 2015

Jos $\varphi_t z = (x(t), y(t)) = (0, y(t))$ ratkaisu sen kanssa. Tällöin $x(t) \equiv 0$, $\dot{x}(t) \equiv 0$, joten 1. yhtälö antaa $y(t) \equiv 0$. Siis $z = \bar{0}$, ja ainoa invariantti osajoukko on $\{\bar{0}\}$.

Saluaatti- joukot $E_c = \bar{B}(\bar{0}, \sqrt{c})$ ovat kompakteja ja $E_c \subset \Omega = \mathbb{R}^2$ kaikilla $c > 0$. Lauseen 3.7 nojalla saadaan aukkoja $\bar{0}$:n asymptotiseksi stabiiliseksi ja joten $E_c \subset \Psi$ kaikilla $c > 0$. Siten $\Psi = \mathbb{R}^2$. □

3. Väite. Tasapainotila $\bar{0}$ on epästabiili.

Tod. Yritä Lyapunovin lokitofunktioksi $W(x,y) = x^2 + y^2 \in C^1(\mathbb{R}^2)$, se on pos. definiitti $\mathbb{R}^2$, joten lauseen 3.3 ehdot (1) ja (3) toteutuvat automaattisesti. Lisäksi

$\dot{W}(x,y) = 2x^4(1-x^2-y^2) + 2y^2(1-x^2-y^2) = 2(x^4+y^2)(1-x^2-y^2)$, joka on > 0

kaikilla $(x,y) \in B(\bar{0},1) \setminus \{\bar{0}\}$, siis lauseen 3.3 kohta (2) alueessa $\Omega = B(\bar{0},1)$, jossa W on siten kasvava Lyapunovin funktio. Lauseen 3.3 nojalla $\bar{0}$ on epästabiili. □

Linearisointi: $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$, $(Df)(x,y) = \begin{bmatrix} 3x^2(1-x^2-y^2) - 2x^4(\dots) & -2x^3y \\ -2xy & (\dots) - 2y^2(\dots) \end{bmatrix}$,

joten $A = (Df)(\bar{0}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\det(A - \lambda I) = \lambda(\lambda - 1) \Leftrightarrow \underbrace{\lambda_1 = 0}$, $\lambda_2 = 1$.

Ominaisarvoista nolla 0, siis lauseen 3.10 ehdot eivät toteudu.

4. Toimiva funktio on jo tehtävässä 3 esiintynyt $V(x,y) = x^2 + y^2$, jolloin

(1) $\dot{V}(z) > 0$ alueessa $\Omega_1 = B(\bar{0},1)$ (kun $z \neq \bar{0}$)

(2) $\dot{V}(z) < 0$ alueessa $\Omega_2 = \mathbb{R}^2 \setminus \bar{B}(\bar{0},1) = \{z \mid \|z\| > 1\}$

(3) $\dot{V}(z) = 0$ kun $z = \bar{0}$ tai $z \in S^1$, siis kun $\|z\| = 1$.

$N = \{z \in \mathbb{R}^2 \mid \dot{V}(z) = 0\} = \{\bar{0}\} \cup S^1$

Ainoat kriittiset pisteet ovat $\bar{0}$ ja $z \in S^1$. Siten alueet Ω_1 ja Ω_2 ovat invariantteja (Rolleen yleistyslause ja ratkaisujen yksikäsitteisyys).

(a) Olkoon $0 < \|z\| < 1$. Invarianssiuden nojalla $\varphi_t z \in \Omega_1$

kaikilla t. Soveltaen lausetta 3.1

kompaktiin joukkoon $K = \overline{\Omega}_1 = \overline{B}(\bar{0},1)$,

jossa $\dot{V}$ on yhdenmukainen $= \dot{V}(z) \geq 0$ kaikilla $z \in K$.

Koska $t \cdot z \in K$ kaikilla t, lauseen 3.1 nojalla

$t^+(z) = \infty$, $t \cdot z \to \omega(z) \neq \emptyset$ ja $\omega(z)$ on joukon $N \cap \overline{\Omega}_1$

$= N \cap K = \{\bar{0}\} \cup S^1$ invariantti osajoukko (kaikki sen osajoukot ovat invariantteja).

Lisäksi, koska $V(\bar{0}) = 0$ ja $V(z) > 0$ ja funktio $V(t) = V(z(t))$ on vähenevä nojalla kasvava, niin $\bar{0} \notin \omega(z)$ (koska $t \cdot z \not\to \bar{0}$). Siten $\emptyset \neq \omega(z) \subset S^1$.

(6). Oletetaan $\|z\| > 1$. Invarianttisuuden nojalla $t \cdot z \in \Omega_2$ kaikilla t, ja koska funktio $V(t) = V(z(t))$ on nyt vähenevä ($\dot{V}(z) \leq 0$), niin

$$1 < \|z(t)\|^2 = V(z(t)) \leq V(z(0)) = \|z\|^2 \text{ kaikilla } t \geq 0.$$

Soveltaen lausetta 3.1 kompaktiin joukkoon, nimittäin $K = \overline{B}(\bar{0}, \|z\|) \setminus B(\bar{0},1)$, jossa $\dot{V}$ on yhdenmukainen: $\dot{V}(z) \leq 0$ kaikilla $z \in K$. Lauseen 3.1 nojalla $t^+(z) = \infty$, $t \cdot z \to \omega(z) \neq \emptyset$ ja $\omega(z) \subset N \cap K = S^1$, sen invariantti osajoukko. Siis $\emptyset \neq \omega(z) \subset S^1$.

Huom. Teoria ei anna aina kaan suoraan tietoa tarkempaa tulosta, koska S^1:n kaikki osajoukot ovat invariantteja! Kuitenkin $\omega(z)$ on tässä yksi S^1:n piste, mikä näkyy tarkemmin virtauksen polar- ja karteesisesta lausekkeesta S^1 (ei lähestyy valosta). Voi vaikuttaa muutenkin ratkaisua eksplisiittisesti.

5. Väite. Joukon $J_1 \cap J_2$ ainoa piste on $t_1 \cdot z$, tai mahdollisesti $t_0 \cdot z = t_2 \cdot z$.

Tod. Oletetaan $y = (t_0+s)\cdot z = (t_1+u)\cdot z \in J_1 \cap J_2$, jossa $0 \leq s \leq t_1 - t_0$ ja $0 \leq u \leq t_2 - t_1$. Koska alkuarvotehtävän ratkaisu on yksikäsitteisesti määrätty, niin

$t \cdot y = y(t) = (t_0 + s + t) \cdot z = (t_1 + u + t) \cdot z$. (1)

Oletan vaikka $u \geq s$. Tällöin (1):n nojalla

$y(-s) = t_0 \cdot z = (t_0 + s - s) \cdot z = (t_1 + u - s) \cdot z \in T(x)$ (2)

ja $0 \leq u - s \leq t_2 - t_1$, siis $t_1 + u - s \in [t_1, t_2]$. Koska (2):n nojalla $y(-s) \in T(x)$, pätee $t_1 + u - s \in \{t_1, t_2\}$.

Jos $t_1 + u - s = t_1$, niin $u = s$ ja (2):n nojalla $t_0 \cdot z = t_1 \cdot z$ vastoin oletusta. Jos $t_1 + u - s = t_2$, niin (2):n nojalla $t_0 \cdot z = t_2 \cdot z$ (joka ei luultavasti tarvita, koska lemman 4.2 todistuksessa nähdään).

Jos taas $s \geq u$, niin

$y(-u) = (t_0 + s - u) \cdot z = (t_1 + u - u) \cdot z = t_1 \cdot z \in T(x)$ (3)

ja $0 \leq s - u \leq t_1 - t_0$, siis $t_0 + s - u \in [t_0, t_1]$, ja (3):n nojalla toisaalta $t_0 + s - u = \{t_0, t_1\}$.

Jos $t_0 + s - u = t_0$, niin $s = u$ ja (3):n nojalla $t_0 \cdot z = t_1 \cdot z$ vastoin oletusta. Jos $t_0 + s - u = t_1$, niin

$s - u = t_1 - t_0$ ja $s \leq t_1 - t_0$, joten $u = 0$. Siten

~~$y(0) = y(-u)$~~

$y = y(0) = y(-u) = t_1 \cdot z$. $\square$