Autonomiset systeemit, 2015, harj. 10, ratkaisut. 1

1. Linearisointi: $(Df)(x,y) = \begin{bmatrix} x^2+y^2-1+2x^2 & 2xy \\ 2xy & x^2+y^2-1+2y^2 \end{bmatrix}$.

Olkoon $z=(a,b)\in S^1$, tällöin $a^2+b^2=1$ ja $(Df)(a,b) = \begin{bmatrix} 2a^2 & 2ab \\ 2ab & 2b^2 \end{bmatrix}$,

$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 2a^2-\lambda & 2ab \\ 2ab & 2b^2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\underbrace{(a^2+b^2)}_{=1}\lambda + 4a^2b^2 - 4a^2b^2 = \lambda^2 - 2\lambda = 0$

$\Leftrightarrow \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 2$. Mukana ominaisarvo 0, joten lauseen 3.10 ehdot eivät täyty, ja sitä ei voi siis soveltaa.

2. Väite. Kriittiset pisteet $z\in S^1$ ovat epästabiileja.

Tod. Olkoon $1>\varepsilon>0$ ja ja $\delta>0$ mielivaltainen. Origon tasapainotilaan $\bar{0}$ liittyvä asymptoottisen stabiiliuden alue on tunnetusti $\Psi = B(\bar{0},1)$ (esimerkki 3.11). Olkoon $z\in S^1$ ja $z_\delta \in B(z,\delta)\cap B(\bar{0},1)$ $(\neq \emptyset)$. Koska $z_\delta \in \Psi$, niin $t\cdot z_\delta \to \bar{0}$, joten $t\cdot z_\delta$ poistuu kiekosta $B(z,\varepsilon)$ olipa $\delta>0$ kuinka pieni tahansa, joten z on epästabiili. □

3. Väite. Tasapainotila $\bar{0}$ on as. stabiili ja $\Psi=\mathbb{R}^2$:

Tod. Selvästi $f(x,y) = (f_1,f_2) = (-x+\sin y,\ -2x-3y)\in C^1(D)$, $D=\mathbb{R}^2$. Linearisoidaan derivaattamatriisin avulla:

$(Df)(x,y) = \begin{bmatrix} -1 & \cos y \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$, erityisesti $A = (Df)(\bar{0}) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$,

$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 \\ -2 & -3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2+4\lambda+5 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -2\pm i \in \mathbb{C}$,

$\mathrm{Re}(\lambda) = -2 < 0$. Voidaan käyttää lausetta 3.9, ja sen nojalla tasapainotila $\bar{0}$ on asymptoottisesti stabiili.

Tarkastellaan linearisoinnin pääosaa

$\dot{z} = Az = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} z$. Etsitään sille sujuen

2
AS, 2005
harj. 10

keksityä Lyapunovin funktio-yrite $V(x,y) = 2x^2+y^2$ (pos. definiitti), pories $\dot{z}=Az$ sulkeen $\dot{V}(x,y) = 4x(-x+y)+2y(-2x-3y) = -4x^2-6y^2<0$ kaikilla $(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{\bar{0}\}$;

Siis vahva Lyapunovin funktio, ja -kuten lauseen 3.9 todistuksessa nähtiin - se toimii ainakin lokaalisti vahvana Lyapunovin funktiona myös alkuperäiselle porille:

Porin $\dot{z}=f(z)$ suhteen

$$\dot{V}(x,y) = 4x(-x+\sin y)+2y(-2x-3y) = -4x^2+4x\sin y$$
$$-4xy-6y^2 \leq -4x^2+4|x|\,|\underbrace{\sin y - y}_{\leq 2|y|}|-6y^2 \leq -4x^2+8|x||y|-6y^2$$
$$= -4(|x|^2-2|x||y|+|y|^2)-2y^2 = -4(|x|-|y|)^2-2y^2<0 \text{ kaikilla } (x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{\bar{0}\}.$$

V on siten vahva Lyapunovin funktio alueessa $\Omega=\mathbb{R}^2$.

Selvästi $\bar{E}_c = \{(x,y)\mid 2x^2+y^2\leq c\}$:t ovat kompakteja ja $\bar{E}_c\subset\Omega=\mathbb{R}^2$. Voidaan käyttää lausetta 3.8, ja sen nojalla $\bar{E}_c\subset\Psi$ kaikilla $c>0$. Siten $\Psi=\mathbb{R}^2$. □

Huom. Lause 3.8 antaa "uudestaan" õ:n as. stabiilisuuden.

4. Väite. Tasapainotila $\bar{o}$ on as. stabiili ja $\Psi=\mathbb{R}^2$.

Tod. Liénard: (i) $f(x)=x^2\geq 0$ ja $g(x)=x^3$, (ii) $g(0)=0$ ja $x\,g(x)=x^4>0$ kaikilla $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Saadaan

$G(x)=\int_0^x g(s)\,ds=\int_0^x s^3\,ds = x^4/4$ ja $V(x,y)=G(x)+y^2/2 = x^4/4+y^2/2$ (pos. definiitti $\mathbb{R}^2$:ssa), $\dot{V}(x,y)=x^3y+y(-x^3-x^2y) = -x^2y^2\leq 0$ kaikilla $(x,y)\in\mathbb{R}^2$; V siis heikko L:n funktio alueessa $\Omega=\mathbb{R}^2$. Lisäksi

$N=\{(x,y)\mid x^2y^2=0\} = N_1\cup N_2 = \{(x,0)\}\cup\{(0,y)\}$.

Olkoon z joukon N invariantin osajoukon piste, $t\cdot z$ ratkaisu sen kautta ja oletetaan $t\cdot z=(x(t),0)\in N_1$

Jollakin välillä $[a, t_1[$ (vastaavasti N_2-tapaus).

Tällöin $y(t)\equiv 0$, $\dot y(t)\equiv 0$, ja tällöin 2. yhtälön nojalla $x(t)\equiv 0$. Siis $z=\bar 0$, ja ainoa invariantti osajoukko on siten $\{\bar 0\}$.

3
AS, 2017
harj. 10

Joukot $\bar E_c = \{(x,y) \mid x^4/4 + y^2/2 \le c\}$ ovat selvästi kompakteja ja $\bar E_c \subset \Omega = \mathbb{R}^2$. Lauseen 3.7 nojalla $\bar 0$ on as. stabiili ja $\mathbb{R}^2 = \bigcup_{c>0} E_c \subset \Psi \subset \mathbb{R}^2$, siis $\Psi = \mathbb{R}^2$. □

Linearisointi ei toimi, sillä siinä $A = \begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}$ ja $\lambda_{1,2}=0$.

5. Väite. Origon [illegible] $U = \{(x,y) \mid y^2 - 2\cos x < 2\} \subset \Psi$.

Tod. Harjoitustehtävästä 8 tunnetaan heikko L:n funktio
$$V(x,y) = 1-\cos x + y^2/2 \text{ alueessa } \Omega =]-\pi,\pi[\times\mathbb{R}.$$

Huom. $xg(x) = x\sin x > 0$ juuri välillä $]-\pi,\pi[\setminus\{0\}$.

Lisäksi $N = N_\Omega = N_1 \cup N_2 = \{(1,y)\} \cup \{(x,0) \mid x\in]-\pi,\pi[\}$.

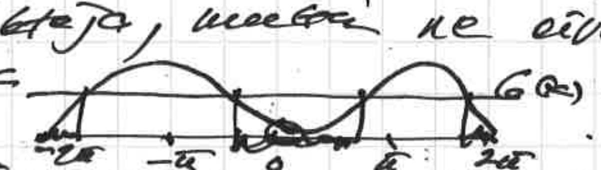
Olkoon z jokin N invariantin osajoukon piste, $t \mapsto z$ ratkaisu on kaikilla ja esimerkiksi $t \mapsto z = (1, y(t)) \in N_1$ jollakin välillä $[0, t_1[$. Tällöin $x(t)\equiv 1$, $\dot x(t)\equiv 0$ ja 1. yhtälön nojalla $y(t)\equiv 0$, $\dot y(t)\equiv 0$, joten 2. yhtälön nojalla $\sin 1 = 0$ ↯. Siten tällaista z ei ole.

Jos $z\in N_2$, vastaavasti nähdään että $z=\bar 0$. Siten ainoa invariantti osajoukko on $\{\bar 0\}$.

Selvästi joukot $\bar E_c = \{(x,y)\in\Omega \mid 1-\cos x + y^2/2 \le c\}$ ovat kompakteja ja $\bar E_c \subset \Omega$, kun $0<c<2$, ja lauseen 3.7 nojalla tällöin $E_c \subset \Psi$.

Siten $U = \bigcup_{0<c<2} E_c \subset \Psi$. □

Huom. Vaikka V on heikko L:n funktio suuremmassakin alueessa, nimittäin joukossa $\Omega' =]-2\pi, 2\pi[\times\mathbb{R}$, joukot $\bar E_c = \{(x,y)\in\Omega' \mid 1-\cos x + y^2/2 \le c\}$ (suljettuna $\mathbb{R}^2$:ssa) ovat kompakteja, mutta ne eivät sisälly joukkoon Ω'.



Lausetta 3.7 ei voi siis soveltaa alueeseen Ω', mutta kyllä alueeseen Ω. Lisäksi $(\pi,0), (-\pi,0) \notin \Psi$, sillä ne ovat [illegible].