# Autonomiset systeemit, k. 2015, harj-1, ratkaisut

1. Triviaaliratkaisut: $x^2-x^3 = x^2(1-x)=0 \Leftrightarrow$ triv.-ratk. $x(t)\equiv x_k$, $k=1,2$, jossa $x_1=1$ ja $x_2=0$.

Funktio $F(t,x)=x^2-x^3$ toteuttaa polynomina lokaalin OY-lauseen sekä PO:n jatkamislauseen ehdot koko $(t,x)$-tasossa $\mathbb{R}^2$. Erityisesti eri ratkaisut eivät yksikäsitteisyyden nojalla leikkaa toisiaan.

AAT $\quad \dot{x} = x^2(1-x)$, $\quad x(0)=x_0$. $\quad (*)$

(1): $x_0 > x_1 = 1$. Tällöin $(*)$:n ratkaisulle pätee $x(t) > 1 = x_1$ kaikilla $t\in\Delta$. Siten

$$\dot{x}(t) = x(t)^2(1-x(t)) < 0 \quad \text{kaikilla } t\in\Delta,$$

joten väliarvolauseen nojalla $x(t)$ on vähenevä funktio:

$$1 < x(t) \le x(0) = x_0 \quad \text{kaikilla } t\in[0,t^+[.$$

PO:n jatkamislauseesta seuraa välttämättä että $t^+=\infty$, siis $[0,\infty[\,\subset\Delta$. Lisäksi rajoitetulla vähenevällä funktiolla $x(t)$ on raja-arvo

$$x_\infty = \lim_{t\to\infty} x(t) \ge 1.$$

On olemassa myös $\dot{x}_\infty = \lim_{t\to\infty}\dot{x}(t) = \lim_{t\to\infty}(x(t)^2-x(t)^3) = x_\infty^2 - x_\infty^3$, ja kurssin DY I-II lemman 2.1 nojalla $\dot{x}_\infty = 0$. Siis $x_\infty\in\{0,1\}$, siten $\underline{x_\infty = 1}$.

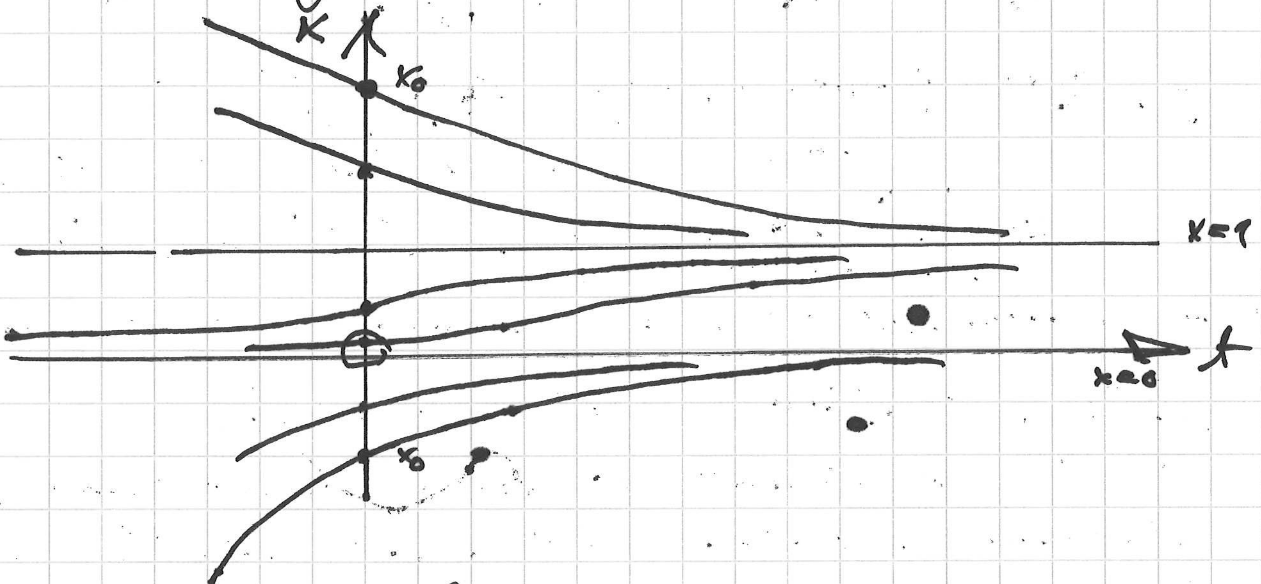
(2) $x_2 = 0 < x_0 < 1 = x_1$. Tällöin $0 < x(t) < 1$ kaikilla $t\in\Delta$ ja $\dot{x}(t) = x(t)^2(1-x(t)) > 0$ kaikilla $t\in\Delta$, joten $x(t)$ on kasvava funktio. PO:n jatkamislauseen nojalla $t^\pm = \pm\infty$, siis $]-\infty,\infty[\,\subset\Delta$. Lisäksi on olemassa raja-arvo $x_\infty = \lim_{t\to\infty} x(t)$, $0 < x_0 \le x_\infty \le 1$, ja lemman 2.1 nojalla $\dot{x}_\infty = x_\infty^2 - x_\infty^3 = 0$. Siten $\underline{x_\infty = 1}$.

2
A:S
harj. 1, k. 2017

(3) $x_0 < 0 = x_2$. Tällöin $x(t)<0$ kaikilla $t\ge 0$ ja $\dot{x}(t) > 0$ kaikilla $t \ge 0$.
Siis $x(t)$ on kasvava ja $x_0 \le x(t) < 0$ kaikilla $t\ge 0$.
Peruslauseen nojalla $[0,\infty[\, \subset \Delta$. Lisäksi on olemassa $x_\infty \le 0$ ja koska $\dot{x} = 0$, siis

$\underline{x_\infty = 0.}$

2. Triviaaliratkaisu $x(t) \equiv 0$ ei ole selvästikään stabiili ja ilmeisesti näyttää otta muut osat:




3. Tapa 1, suora lasku: $x(t) = c_1\cos t + c_2 \sin t$,
$y(t) = -c_1 \sin t + c_2 \cos t$, joten

$$x(t)^2 + y(t)^2 = (c_1\cos t + c_2 \sin t)^2 + (-c_1\sin t + c_2\cos t)^2 =$$
$$c_1^2(\cos^2 t + \sin^2 t) + c_2^2(\sin^2 t + \cos^2 t) + 2c_1c_2\cos t \sin t$$
$$- 2c_1c_2 \sin t \cos t = c_1^2 + c_2^2 = c^2.$$

Tapa 2, radan DY: $y'(x) = \frac{\dot y}{\dot x} = -\frac{x}{y}$, separoituva

$$\Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \Leftrightarrow y\,dy = -x\,dx \Leftrightarrow \int y\,dy = -\int x\,dx$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}y^2 = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{c^2}{2} \Leftrightarrow x^2 + y^2 = c^2$$

4. Väite. Kuvaus f on lokaalisti Lipschitz D:ssä.

Tod. Olkoon $x_0 \in D$ ja $r>0$ sellainen että
$$\bar{B}(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\| \le r\} \subset D.$$

3

AS

heiy. 1.6.2015

Koska $f$ on $C^1$ kuulan $\bar{B}(x_0,r)$ ympäristössä, komponenttien $f_k$ osittaisderivaatat $\frac{\partial f_k}{\partial x_l}$, $k,l=1,\dots,n$, ovat siinä jatkuvia. Heine–Borelin lauseen nojalla ne ovat rajoitettuja kompaktissa joukossa $\bar{B}(x_0,r)$. Siten komponenttien gradientit

$$\nabla f_k = \left(\frac{\partial f_k}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial f_k}{\partial x_n}\right)\in\mathbb{R}^n,\quad k=1,\dots,n$$

ovat siinä rajoitettuja vektoreita:

$$\|\nabla f_k(x)\| \le M_k < \infty \text{ kaikilla } x\in\bar{B}(x_0,r),\ k=1,\dots,n$$

Olkoon $x,y\in\bar{B}(x_0,r)$. Väliarvolauseen nojalla janalta $[x,y]\subset\bar{B}(x_0,r)$ ($\bar{B}$ konveksi) löytyy sellainen $\xi_k\in\bar{B}(x_0,r)$ että $f(y)-f(x) = (f_1(y)-f_1(x),\dots,f_n(y)-f_n(x))$
$= (\nabla f_1(\xi_1)\cdot(y-x),\dots,\nabla f_n(\xi_n)\cdot(y-x))$,
ja Schwarzin epäyhtälön nojalla

$$|\nabla f_k(\xi_k)\cdot(y-x)| \le \|\nabla f_k(\xi_k)\|\,\|y-x\| \le M_k\|y-x\|.$$

Siten $\|f(y)-f(x)\| \le \|f(y)-f(x)\|_1 = \sum_{k=1}^n |f_k(y)-f_k(x)| \le \sum_{k=1}^n M_k\|y-x\|$
$= M\|y-x\|$, jossa $M=\sum_{k=1}^n M_k$ eli Lipschitz-jatkuva kuulassa $\bar{B}(x_0,r)$. □

**5. Väite.** $\|x-y\| = \sum_{k=1}^m \|z_k - z_{k-1}\|$.

Tod. Olkoon $z_k = (1-t_k)x + t_k y$, $0=t_0<\dots<t_m=1$.

Tällöin $z_k - z_{k-1} = (1-t_k)x + t_k y - (1-t_{k-1})x - t_{k-1}y =$
$-(t_k-t_{k-1})x + (t_k-t_{k-1})y = (t_k-t_{k-1})(y-x)$,
ja siten
$\|z_k - z_{k-1}\| = |t_k-t_{k-1}|\,\|y-x\| = (t_k-t_{k-1})\|y-x\|$, sillä $t_k>t_{k-1}$.

Saadaan

$$\sum_{k=1}^n \|z_k-z_{k-1}\| = \sum_{k=1}^m (t_k-t_{k-1})\|y-x\| = \|y-x\|\sum_{k=1}^m (t_k-t_{k-1})$$
$$= \|y-x\|(t_m-t_0) = \|y-x\|(1-0) = \|x-y\|. \quad \square$$