

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Autonomiset systeemit
Toinen kurssikoe 6.5.2015 klo 12-15

Huom. Tenttijällä saa olla A4-arkin kokoinen tiivistelmä mukanaan tentissä.

1. Tutki autonomisen parin

$$\begin{aligned}\dot{x} &= ay - y^2 \\ \dot{y} &= x^2 - y^2\end{aligned}$$

tasapainotilan (a, a) stabiilisuuden laatua parametrin arvoilla $a > 0$ (siis arvoja $a \leq 0$ ei tarvitse huomioida).

2. Osoita seuraavan autonomisen parin tasapainotila $\mathbf{0}$ epästabiiliksi:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x + x^3 + xy^2 \\ \dot{y} &= y - 7x^2y.\end{aligned}$$

3. Tarkastellaan autonomista paria

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -\frac{2x}{1+x^2} - (1+x^2)y\end{aligned}$$

(a) (3 pist.) Osoita sen tasapainotila $\mathbf{0}$ asymptoottisesti stabiiliksi.

(b) (3 pist.) Määritä asymptoottisen stabiilisuuden alue Ψ .

4. Pidetään tunnettuna että autonomisen parin

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -2y - x(2x^2 + y^2 - 4) \\ \dot{y} &= x - y(2x^2 + y^2 - 4)\end{aligned}$$

ainoa kriittinen piste on $\mathbf{0}$. Osoita että parilla on ainakin yksi periodinen ratkaisu. Ohje. Origin ympärille positiivisesti invariantti rengas, esimerkiksi Lyapunovin funktio-loittofunktio -tekniikan avulla (kyllä muukin on mahdollista).