# Autonomiset systeemit, 2. kurssikoe 6.5.2019, ratkaisut.

**1.** *Väite.* Kun $a>0$, tasapainotila $(a,a)$ on as. stabiili.

*Tod.* Selvästi $f(x,y)=(ay-y^2,\, x^2-y^2)\in C^1(\mathbb{R}^2)$. Linearisoidaan derivaattamatriisin avulla:

$$(Df)(x,y)=\begin{bmatrix}0 & a-2y\\ 2x & -2y\end{bmatrix},\quad \text{erityisesti } A=(Df)(a,a)$$

$$=\begin{bmatrix}0 & -a\\ 2a & -2a\end{bmatrix},\quad \det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}-\lambda & -a\\ 2a & -2a-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2+2a\lambda+2a^2=0$$

$$\iff \lambda=\frac{-2a\pm\sqrt{4a^2-8a^2=-4a^2}}{2}=\frac{-2a\pm 2ai}{2}=a(-1\pm i)\in\mathbb{C}.$$

Kun $a>0$, niin $\mathrm{Re}(\lambda)=-a<0$, joten voidaan käyttää Poincarén lausetta 3.9. Sen nojalla tasapainotila $(a,a)$ on asymptoottisesti stabiili. □

**2.** *Väite.* Tasapainotila $\bar{0}$ on epästabiili.

*Tod.* Yritä Ljapunovin loittofunktiota

$$W(x,y)=ax^2+y^2,$$ jossa $a\in\mathbb{R}$. Tällöin lauseen 3.3 ehdot (1) ja (3) ovat automaattisesti täytetty koko $\mathbb{R}^2$:ssa. Ehto (2):

$$\dot W(x,y)=2ax(x+x^3+xy^2)+2y(y-7x^2y)=2ax^2+2ax^4+2y^2$$

$$+\cancel{2(axy}\; 2(a-7)x^2y^2.$$

Valinta $a=7$ (mikä tahansa $a\geq 7$ käy) antaa $W=7x^2+y^2$, jolloin $\dot W=14x^2+14x^4+2y^2>0$ kaikilla $(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{\bar{0}\}$! Siten $W=7x^2+y^2$ on vahva Ljapunovin loittofunktio alueessa $\Omega=\mathbb{R}^2$, jonka lauseen 3.3 nojalla tasapainotila $\bar{0}$ on epästabiili. □

*Huom.* Linearisointi ei toimi tässä, sillä se antaa $A=(Df)(\bar{0})=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$, $\lambda_{1,2}=1$, kaksinkertainen, joten lauseen 3.10 ehdot eivät sillä ollen toteudu.

3. (a) Väite. Tasapainotila $\bar{0}$ on as-stabiili.

2 AS 2. kl. 6.5.2015

Tod. Etsitään Lyapunovin funktio, koska siitä kuitenkin tarvitaan kohdassa (b).

Liénardin muotoinen: (1) $f(x) = 1+x^2 > 0$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$,

(2) $g(x) = \frac{2x}{1+x^2}$, $g(0)=0$ ja $xg(x) = \frac{2x^2}{1+x^2} > 0$ kaikilla $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Saadaan $G(x) = \int_0^x g(s)ds = \int_0^x \frac{2s}{1+s^2}ds = \Big/_0^x \ln(1+s^2) = \ln(1+x^2)$, ja saadaan alueessa $\Omega = \mathbb{R}\times\mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ Lyapunovin funktio

$$V(x,y) = G(x) + y^2/2 = \ln(1+x^2) + y^2/2,$$ pos.def. $\mathbb{R}^2$:ssa.

Se on heikko, sillä $\dot{V}(x,y) = \frac{2xy}{1+x^2} - \frac{2xy}{1+x^2} - (1+x^2)y^2$
$= -(1+x^2)y^2 \le 0$ kaikilla $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

$N = \{(x,y) \in \Omega = \mathbb{R}^2 \mid \dot{V}(x,y) = 0\} = \{(x,0) \mid x \in \mathbb{R}\}$.

Olkoon $z=(x,0)$ joukon $N$ invariantin osajoukon piste ja $t \cdot z = (x(t), y(t))$ ratkaisu sen kautta. Tällöin, koska $t\cdot z \in N$, pätee $y(t) \equiv 0$, $\dot{y}(t) \equiv 0$ ja toisesta yhtälöstä $\frac{2x(t)}{1+x(t)^2} \equiv 0 \Leftrightarrow x(t) \equiv 0$. Siten $z = \bar{0}$, ja N:n ainoa invariantti osajoukko on $\{\bar{0}\}$.

Käytetään lauseen 3.2 kohtaa (b): voidaan valita mielivaltainen $r>0$, sillä $\bar{B}(\bar{0},r) \subset \Omega = \mathbb{R}^2$, ja $N \cap \bar{B}(\bar{0},r)$:n ainoa invariantti osajoukko on $\{\bar{0}\}$. Lause antaa väitteen. $\square$

Huom. Tässä kohdassa myös linearisointi toimii:
$A = (Df)(\bar{0}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$, ja ominaisarvot ovat $\lambda = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{7}}{2} \in \mathbb{C}$,
$\mathrm{Re}(\lambda) = -\frac{1}{2} < 0$. Lause 3.9 antaa väitteen.

(b) Väite. Asymptoottisen stabiilisuuden alue on $\Psi = \mathbb{R}^2$.

Tod. Käytetään lausetta 3.7 kohdassa (a) löydettyyn heikkoon Lyapunovin funktioon $V(x,y) = \ln(1+x^2) + y^2/2$, $\Omega = \mathbb{R}^2$.

Jo osoitettiin että $N$:n ainoa invariantti rajajoukko on $\{\bar 0\}$.

3 AS 2.lk. 6.5.2015

Selvästi joukot $\bar E_c = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \ln(1+x^2)+y^2/2 \le c\}$ ovat rajoitettuja ja siten suljettuina kompakteja (esim. $x^2 \le e^c-1$). Luonnollisesti $\bar E_c \subset \Omega = \mathbb{R}^2$. Lauseen 3.7 nojalla $\bar E_c \subset \Psi$ kaikilla $c>0$, joten $\Psi = \mathbb{R}^2$. □

4. Väite. Parilla on periodinen ratkaisu.

Tod. Käytetään Lyapunov-tekniikkaa: sopiva funktio on $V(x,y) = x^2+2y^2$, pos. def. $\mathbb{R}^2$:ssa ja

$$\dot V(x,y) = -4xy - 2x^2(2x^2+y^2-4) + 4xy - 4y^2(2x^2+y^2-4) = -2(x^2+2y^2)(2x^2+y^2-4),$$

joten

(1) $\dot V(x,y) > 0$, kun $2x^2+y^2<4$ (ja $(x,y)\neq \bar 0$),

(2) $\dot V(x,y) < 0$, kun $2x^2+y^2>4$ ja

(3) $\dot V(x,y) = 0$, kun $2x^2+y^2=4$ (tai $(x,y)=\bar 0$).

Valitaan sellaiset $c_{1,2}>0$ että ellipsi $C = \{(x,y) \mid 2x^2+y^2=4\}$ on tasa-arvokäyrän määräämän alueen $E_{c_2} = \{(x,y) \mid x^2+2y^2 < c_2\}$, minkä sisältää itse alueen $\bar E_{c_1} = \{(x,y) \mid x^2+2y^2 \le c_1\}$ reunoineen. Esimerkiksi arvot $c_1 = 1$ ja $c_2 = 9$ käyvät.

Väitelauseesta seuraa että rengas $K = \bar E_{c_2} \setminus E_{c_1}$ on positiivisesti invariantti (se on sama myös lauseessa 1.1), se on selvästi kompakti, ja koska siinä ei ole kriittisiä pisteitä, sen perusteella voidaan soveltaa Bendixsonin lausetta: Olkoon $z \in K$. Tällöin rajajoukko $\omega(z)$ on periodinen rata, siis joko periodinen ratkaisu. □