

Matematiikan ja tilastotieteen laitos  
Autonomiset systeemit  
Ensimmäinen kurssikoe 4.3.2015 klo 12-15

**Huom.** Tenttijällä saa olla A4-arkin kokoinen tiivistelmä mukanaan tentissä.

1. Millä parametrin  $c \in \mathbf{R}$  arvoilla lineaarinen 2.kl. differentiaaliyhtälö

$$\ddot{u} + 2\dot{u} + cu = 0,$$

siis vastaava lineaarinen 1.kl. pari, on stabiili tai asympotoottisesti stabiili?

2. Osoita seuraava lineaarinen homogeenipari asympotoottisesti stabiiliksi:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x - \frac{t^2 y}{1 + t^2} \\ \dot{y} &= 4x - 3y + \frac{x}{1 + t^2}.\end{aligned}$$

3. Tarkastellaan tasapainotilaa  $\mathbf{0}$  autonomisessa parissa

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -x + y \\ \dot{y} &= -x^3 - x^2 y.\end{aligned}$$

(a) Osoita että  $V(x, y) = x^4 + 2y^2$  toimii sille heikkona Lyapunovin funktiona koko tasossa  $\mathbf{R}^2$ .

(b) Osoita tämän avulla  $\mathbf{0}$  asympotoottisesti stabiiliksi.

4. Tarkastellaan autonomista paria

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -x^2 + y + 4 \\ \dot{y} &= -xy + 1.\end{aligned}$$

(a) Osoita että suorakaide

$$T = ]1, 3[ \times ] - 2, 2[ = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \in ]1, 3[, y \in ] - 2, 2[\}$$

on siinä positiivisesti invariantti.

(b) Olkoon  $z = (2, 0)$ . Osoita että tämän pisteen kautta kulkevan radan rajajoukko  $\omega(z)$  on epätyhjä, kompakti ja yhtenäinen.

Ohje. Piirrä kuva.