Autonomiset systeemit, k. 2015, harj. 2, ratkaisut.

1. Väite. Funktio f on Lipschitz joukossa B.

Tod. Koska f on lokaalisti Lipschitz D:ssä, jokaista $x \in B$ kohti löytyy sellaiset vakiot $r(x)>0$ ja $M(x)\geq 0$ että

$$\|f(y)-f(z)\| \leq M(x)\|y-z\| \quad \text{kaikilla } y,z \in B(x,2r(x)).$$

Avoimet kuulat $B(x,r(x))$, $x\in B$, muodostavat joukon B avoimen peitteen (Topo I; huomaa puolitettu säde). Koska B on kompakti, peiteominaisuuden (Topo I) nojalla löytyy <u>äärellinen</u> osapeite

$$\{B(x_k, r(x_k)) \mid 1\leq k\leq p\}, \quad B\subset \bigcup_{1\leq k\leq p} B(x_k,r(x_k)).$$

Merkitään $r = \min\limits_{1\leq k\leq p} r(x_k) > 0$ ja $M = \max\limits_{1\leq k\leq p} M(x_k) < \infty$.

Olkoon $x,y\in B$. Koska B on konveksi, yhdistysjana $[x,y] = \{(1-t)x+ty \mid t\in[0,1]\}$ sisältyy joukkoon B. Valitaan yhdistysjanalta peräkkäiset pisteet $z_i = (1-t_i)x+t_i y$, $0=t_0<\dots<t_i<\dots<t_m=1$, erityisesti $z_0=x$ ja $z_m=y$, niin tiheästi että

$$\|z_i - z_{i-1}\| < r \iff (t_i-t_{i-1})\|x-y\| < r, \quad i=0,\dots,m.$$

Tällöin z_i ja z_{i-1} kuuluvat samaan kuulaan $B(x_k,2r(x_k))$ jollakin $k=1,\dots,p$. Siten

$$\|f(z_i)-f(z_{i-1})\| \leq M(x_k)\|z_{i-1}-z_i\| \leq M\|z_{i-1}-z_i\|,$$

ja [illegible] harjoitusten 1 tehtävän 5 tuloksen nojalla

$$\|f(x)-f(y)\| = \Big\|\sum_{i=1}^m \big(f(z_{i-1})-f(z_i)\big)\Big\| \leq \sum_{i=1}^m \|f(z_{i-1})-f(z_i)\| \leq$$

$$M\sum_{i=1}^m \|z_{i-1}-z_i\| \underset{\text{t.5}}{=} M\|x-y\|,$$ joten M kelpaa L-vakioksi joukossa B. □

Huom. Esitetystä todistuksesta ei käytetty Lebesguen lukua, vaan "sade perustelun".

2. Pätee siis (1.9): jollakin $\varepsilon > 0$ ja $0 < \delta < t_1$ pätee

$$(t \cdot x - t_1 \cdot x) \bullet n(t_1 \cdot x) > \varepsilon (t_1 - t) \quad \text{kaikille } t_1 - \delta < t < t_1.$$

Väite. Jollakin $\eta > 0$ pätee (1.10):

$$(t \cdot x - t_1 \cdot x) \bullet n(t_1 \cdot x) \geq \eta \| t \cdot x - t_1 \cdot x \| \quad \text{kaikille } t_1 - \delta < t < t_1.$$

Tod. Kuten sanottu, tiedetään että kuvaus $g(t) = \| t \cdot x - t_1 \cdot x \|$ on Lipschitz välillä $[t_1 - \delta, t_1]$. Siten löytyy sellainen $M > 0$ että kaikille $t_1 - \delta < t < t_1$ pätee $\| t \cdot x - t_1 \cdot x \| = | g(t) - \underbrace{g(t_1)}_{0!} | \leq M | t - t_1 | = M(t_1 - t)$.

Tällöin $t_1 - t \geq \frac{1}{M} \| t \cdot x - t_1 \cdot x \|$, ja (1.9):n nojalla

$$(t \cdot x - t_1 \cdot x) \bullet n(t_1 \cdot x) > \frac{\varepsilon}{M} \| t \cdot x - t_1 \cdot x \| \quad \text{kaikille } t_1 - \delta < t < t_1$$

— voidaan siis valita $\eta = \frac{\varepsilon}{M} > 0$. $\square$

Huom. Merkitään $x(t) = t \cdot x$ ja $x_1 = t_1 \cdot x = x(t_1)$. Erotuksen $x(t) - x(t_1)$ k:nnelle komponentille pätee väliarvolauseen nojalla $| x_k(t) - x_k(t_1) | = | \dot{x}_k(\xi_k) | \overset{(t,t_1)}{=} | f^k(x(\xi_k)) | | t - t_1 | \leq M_k | t - t_1 |$ kaikille $t \in [t_1 - \delta, t_1]$ (x ja f jvc, Heine-Borel). Siten

$$\| x(t) - x(t_1) \| \leq \| x(t) - x(t_1) \|_1 = \sum_{k=1}^{n} | x_k(t) - x_k(t_1) | \leq \sum_{k=1}^{n} M_k | t - t_1 |$$

$= M | t - t_1 |$, jossa $M = \sum_{k=1}^{n} M_k$. Siis g on Lipschitz.

3. Väite. Olkoon $z = (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Tällöin

(a) $\gamma^+(z)$ on rajoitettu joukko,

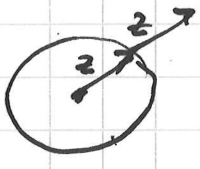
(b) $t^+(z) = \infty$, siis ratkaisu $t \cdot z$ on hengissä ainakin välillä $[0, \infty[$, ts. $[0, \infty[\subset \Delta(z)$.

Tod. Merkitään $f(x,y) = (f_1, f_2) = (-x-y^2, xy-y)$.

3 AS hyv. 2.6.2015

Koska $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2 \in C^1(\mathbb{R}^2)$, kuvaus f on lokaalisti Lipschitz alueessa $D=\mathbb{R}^2$.

Tarkastellaan kuulaa $B(\bar{0},r)$, $r>0$, ja sen reunaa $\partial B(\bar{0},r) = S(\bar{0},r) = \{z=(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \|z\|=r\}$. Pisteessä $z\in S(\bar{0},r)$ reunan ulkonormaali on $n(z)=z$,



ja lisäksi pätee $n(z)\cdot f(z) =$

$$(x,y)\cdot(-x-y^2, xy-y) = -x^2-xy^2+xy^2-y^2 = -x^2-y^2 < 0$$

Luonnollisesti $\bar{B}(\bar{0},r)\subset D=\mathbb{R}^2$. Lauseen 1.1 nojalla avoin kuula $B(\bar{0},r)$ on pos. invariantti- tehtävän parin $\dot{z} = f(z)$ suhteen.

Olkoon $z\in\mathbb{R}^2$; valitaan sellainen r että ~~$z\in B(\bar{0},r)$~~ $z\in B(\bar{0},r)$. Tällöin (a) pos. invarianttisuuden nojalla $\gamma^+(z)\subset B(\bar{0},r)$, ts. rata on rajoitettu, ja koska (b) $\bar{B}(\bar{0},r)\subset D$ on kompakti, lemman 1.1 tai Poistumislauseen nojalla $I^+(z)=\infty$. □

4. Lokaalin OY-lauseen oletukset toteutuvat joukossa $\mathbb{R}\times D$.

Väite. Jos rata $\gamma(x)$ sisältää kriittisen pisteen x_0, niin piste x on itse kriittinen ja $\gamma(x)=\{x\}$.

Tod. Pisteessä x_0 vastaa AS:n (1.1) ratkaisu $x(t)\equiv x_0$. Koska $x_0\in\gamma(x)$, jollakin $t_0\in\Delta(x)$ pätee $x_0 = t_0\cdot x$. Siten tasapainotila x_0 ja ratkaisu $t\cdot x = x(t)$ toteuttavat saman AAT:n $\dot{x} = f(x)$, $x(t_0)=x_0$.

OY-lauseen yksikäsitteisyydestä seuraa että $t\cdot x\equiv x_0$. Erityisesti $x = 0\cdot x = x_0$, joten x on itse kriittinen piste. Lisäksi tarkalleen $\gamma(x)=\gamma(x_0)=\{x_0\}=\{x\}$. □