Analyysi II, 1. kurssikoe to 5.3.2015, ratk. (Jouni Luukkainen). Arvostelu valmis 24.3.2015

Teht. 1. **(a)** *Määritä vakiot A ja B siten, että* $\dfrac{1}{x^2+x-2} = \dfrac{A}{x-1} + \dfrac{B}{x+2}$.

(b) *Laske* $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{dx}{x^2+x-2}$.

Ratk. **(a)** Nyt

$$\frac{1}{x^2+x-2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} = \frac{A(x+2)+B(x-1)}{(x-1)(x+2)} = \frac{(A+B)x+(2A-B)}{x^2+x-2} \quad \text{kaikilla } x \in \mathbb{R} \setminus \{1,-2\}$$
$$\iff \begin{cases} A+B=0 \\ 2A-B=1 \end{cases} \iff \begin{cases} A=1/3 \\ B=-1/3 \end{cases}.$$

(b) Huomataan, että $1, -2 \notin [-1, 0]$. Täten (a)-kohdan nojalla

$$\int_{-1}^{0} \frac{dx}{x^2+x-2} = \int_{-1}^{0} \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x-1} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x+2} \right) dx = \mathop{\Big/}_{-1}^{0} \frac{1}{3} (\ln|x-1| - \ln|x+2|)$$
$$= \frac{1}{3}((\ln|-1| - \ln 2) - (\ln|-2| - \ln 1) = \frac{1}{3}(2\ln 1 - 2\ln 2) = -\frac{2}{3}\ln 2.$$

Arvostelusta. **(a)** 3 p. Yhtälön $x^2+x-2 = (x-1)(x+2)$ toteamatta jättämisestä ei mennyt pisteitä. Lavennus samannimiksi toi 1 p, siitä yhtälöpariin yltäminen 1 p ja yhtälöparin ratkaisu 1 p.

(b) 3 p. Siitä, että ei todennut, että $1, -2 \notin [-1, 0]$, ei mennyt pisteitä. Integrointi muotoon $\mathop{\Big/}_{-1}^{0}$ toi 1 p; sijoituksen toimittaminen sieventämättömänä 1 p ja loppusievennys 1 p. Integroinnissa lausekkeesta $(1/3)\ln(x-1)$ sakotettiin 1 p, sillä $x-1<0$, kun $x \in [-1,0]$; virhe kyllä oikeni jatkossa. Vastausten muodot $(2/3)\ln(1/2)$ ja $(1/3)\ln(1/4)$ hyväksyttiin, mutta muotoa $(2/3)(\ln 1 - \ln 2)$ ei.

Teht. 2. *Tutki, suppeneeko epäoleellinen integraali* $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^x}{x}\, dx$.

Ratk. Integraali on epäoleellinen molemmilla rajoillaan (alarajalla, koska $e^x/x \to \infty$, kun $x \to 0+$). Määritelmän mukaan integraali $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^x}{x}\, dx$ suppenee, jos molemmat integraaleista $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{x}\, dx$ ja $\displaystyle\int_1^\infty \frac{e^x}{x}\, dx$ suppenevat (katkaisupisteenä voisi luvun 1 sijasta olla mikä tahansa luku $c > 0$). Nyt

$$\frac{e^x}{x} > \frac{e^0}{x} = \frac{1}{x} > 0 \qquad \text{kaikilla } x > 0.$$

Toisaalta luentojen mukaan epäoleelliset integraalit $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x}\, dx$ ja $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x}\, dx$ hajaantuvat ($= \infty$). Näin ollen minoranttiperiaatteen mukaan epäoleelliset integraalit $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{x}\, dx$ ja $\displaystyle\int_1^\infty \frac{e^x}{x}\, dx$ hajaantuvat ($= \infty$). Kummankin hajaantumisesta yksinään seuraa, että tutkittava epäoleellinen integraali hajaantuu (silloin $= \infty$ integroitavan funktion positiivisuuden tähden).

Arvostelusta. Tavallinen virhe, josta sakotettiin 1 p, oli, että ei todennut, että minoranttifunktio $1/x$ on positiivinen tai että minoranttifunktion $1/x$ integraali yli välin $]0, 1]$ tai yli välin $[1, \infty[$ hajaantuu *kohden ääretöntä*. Suppeneehan vakiofunktion 0 integraali $\int_0^\infty 0\, dx$ (arvonaan 0), vaikka funktiolla 0 on minoranttina vakiofunktio -1, jonka integraali $\int_0^\infty (-1)\, dx$ hajaantuu (arvonaan $-\infty$). Väärään suuntaan kirjoitettu epäyhtälö $e^x/x \le 1/x$, jota oli kuitenkin jatkossa ajateltu oikeassa muodossa $e^x/x \ge 1/x$, vei 2 p. Luennoissa oli osoitettu juuri standardi-integraalien $\int_0^1 dx/x$ ja $\int_1^\infty dx/x$ hajaantuminen, mutta kumpikaan ei seuraa integraalin $\int_0^\infty dx/x$ hajaantumisesta, sillä kyseinen osaintegraalihan saisi supeta toisen hajaantuessa; tästä saattoi mennä 1 p.

Väli $]0,\infty[$ oli tutkittavalle integraalille jaettava kahtia määritelmän ehdon mukaisesti. Moni ei kuitenkaan ollut näin menetellyt vaan käyttänyt (intuitioon perustuen) seuraavaa lausetta, joka pätee, mutta jota ei ole esitetty luennoissa. Tällöin ratkaisusta sai korkeintaan 4 p.

Lause. *Olkoon $-\infty \le a < b \le \infty$. Olkoot $f, g\colon]a,b[\to \mathbb{R}$ funktioita, jotka ovat integroituvia yli jokaisen välin $]a,b[$ suljetun rajoitetun osavälin ja joille $f(x) \ge g(x) \ge 0$ jokaisella $x \in]a,b[$. Oletetaan, että integraali $\int_a^b g(x)\,dx$ hajaantuu. Tällöin integraali $\int_a^b f(x)\,dx$ hajaantuu.*

Tod. Valitaan piste $c \in]a,b[$. Koska integraali $\int_a^b g(x)\,dx$ hajaantuu, niin määritelmän mukaan ainakin toinen integraaleista $\int_a^c g(x)\,dx$ ja $\int_c^b g(x)\,dx$ hajaantuu. Jos integraali $\int_a^c g(x)\,dx$ hajaantuu, niin minoranttiperiaatteen nojalla integraali $\int_a^c f(x)\,dx$ hajaantuu. Jos taas integraali $\int_c^b g(x)\,dx$ hajaantuu, niin vastaavasti integraali $\int_c^b f(x)\,dx$ hajaantuu. Täten määritelmän mukaan integraali $\int_a^b f(x)\,dx$ hajaantuu. ■

Huom. Katsotaanpa, mitä tässä lauseessa integraalin $\int_a^b f(x)\,dx$ hajaantuminen tarkoittaa kvantitatiivisesti. Koska $f(x) \ge 0$ jokaisella $x \in]a,b[$, niin raja-arvot $\int_a^c f(x)\,dx = \lim_{\alpha\to a+}\int_\alpha^c f(x)\,dx \in [0,\infty]$ ja $\int_c^b f(x)\,dx = \lim_{\beta\to b-}\int_c^\beta f(x)\,dx \in [0,\infty]$ ovat olemassa ja niiden (luvun c valinnasta riippumaton) summa $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \in [0,\infty]$ on määritelty. Määritelmän mukaan integraali $\int_a^b f(x)\,dx$ hajaantuu jos ja vain jos ainakin toinen integraaleista $\int_a^c f(x)\,dx$ ja $\int_c^b f(x)\,dx$ hajaantuu eli on arvoltaan ∞. Täten integraali $\int_a^b f(x)\,dx$ hajaantuu jos ja vain jos integraali $\int_a^b f(x)\,dx$ on arvoltaan ∞. ■

Osittaisintegrointikin toimi, kunhan tehtiin yksinkertaistava arviointi alaspäin:

$$\int_1^b \frac{e^x}{x}\,dx = \Big/_{\!1}^{b} \frac{e^x}{x} - \int_1^b \left(-\frac{e^x}{x^2}\right)dx = \left(\frac{e^b}{b} - e\right) + \int_1^b \frac{e^x}{x^2}\,dx \ge \left(\frac{e^b}{b} - e\right) + 0 \to \infty, \qquad \text{kun } 1 \le b \to \infty,$$

joten $\int_1^\infty (e^x/x)\,dx = \infty$. Samoin

$$\int_a^1 \frac{e^x}{x}\,dx = \Big/_{\!a}^{1} e^x \ln x - \int_a^1 e^x \ln x\,dx \ge (0 - e^a \ln a) + 0 \to \infty, \qquad \text{kun } 1 \ge a \to 0+,$$

joten $\int_0^1 (e^x/x)\,dx = \infty$.

Teht. 3. *Olkoon $f\colon [1,4] \to \mathbb{R}$ funktio*

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 1 \le x \le 2, \\ 2, & 2 < x < 3, \\ 3, & 3 \le x \le 4, \end{cases}$$

ja olkoon $1, 2, 2+\frac{1}{n}, 3-\frac{1}{n}, 3, 4$ välin $[1,4]$ jako J, missä $n \in \mathbb{N}_1$, $n \ge 3$.

(a) *Laske alasumma $\underline{S}_J(f)$ ja yläsumma $\overline{S}_J(f)$.*

(b) *Osoita kohdan* (a) *ja Riemannin integroituvuusehdon perusteella, että f on integroituva.*

Ratk. (a) (Alla ala- ja yläsummien laskuissa ei ollut käytetty yksinkertaistavaa huomiota, että f on kasvava funktio, jolloin kullakin jakovälillä f:llä on pienin arvo vasemmassa ja suurin arvo oikeassa päätepisteessä.)

Alasumma: Koska $\inf f[1,2] = \min\{1\} = 1$, $\inf f[2, 2+\frac{1}{n}] = \min\{1,2\} = 1$, $\inf f[2+\frac{1}{n}, 3-\frac{1}{n}] = \min\{2\} = 2$, $\inf f[3-\frac{1}{n}, 3] = \min\{2,3\} = 2$ ja $\inf[3,4] = \min\{3\} = 3$, niin

$$\underline{S}_J(f) = 1(2-1) + 1((2+\tfrac{1}{n})-2) + 2((3-\tfrac{1}{n})-(2+\tfrac{1}{n})) + 2(3-(3-\tfrac{1}{n})) + 3(4-3) = 1 + \tfrac{1}{n} + (2-\tfrac{4}{n}) + \tfrac{2}{n} + 3 = 6 - \tfrac{1}{n}.$$

Yläsumma: Koska $\sup f[1,2] = \max\{1\} = 1$, $\sup f[2, 2+\frac{1}{n}] = \max\{1,2\} = 2$, $\sup f[2+\frac{1}{n}, 3-\frac{1}{n}] = \max\{2\} = 2$, $\sup f[3-\frac{1}{n}, 3] = \max\{2,3\} = 3$ ja $\sup f[3,4] = \max\{3\} = 3$, niin

$$\overline{S}_J(f) = 1(2-1) + 2((2+\tfrac{1}{n})-2) + 2((3-\tfrac{1}{n})-(2+\tfrac{1}{n})) + 3(3-(3-\tfrac{1}{n})) + 3(4-3) = 1 + \tfrac{2}{n} + (2-\tfrac{4}{n}) + \tfrac{3}{n} + 3 = 6 + \tfrac{1}{n}.$$

(b) Olkoon $\varepsilon > 0$. Valitaan sellainen $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, että $n > 2/\varepsilon$. Tällöin

$$\overline{S}_J(f) - \underline{S}_J(f) = (6 + \tfrac{1}{n}) - (6 - \tfrac{1}{n}) = \tfrac{2}{n} < \varepsilon.$$

Siis f on integroituva.

Arvostelusta. (a) 3 p. Huolimattomuusvirheistä sakotettiin tällaisessa laskutehtävässä. Jakovälejä J:ssä oli siis 5.

(b) 3 p. Riemannin integroituvuusehdon logiikan (”kaikilla $\varepsilon > 0$ on olemassa jako J, jolla $\overline{S}_J(f) - \underline{S}_J(f) < \varepsilon$” tai siis tässä tehtävässä ”*kaikilla* $\varepsilon > 0$ on $\overline{S}_J(f) - \underline{S}_J(f) < \varepsilon$ *jollain* $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$”) käytön korrektisuudesta ei arvostelussa juuri pidetty kiinni. Niinpä sakkoa ei mennyt, jos jätti todistuksen alussa sanomatta ”olkoon $\varepsilon > 0$” tai jos kirjoitti ”valitaan $\varepsilon > 0$” (virhehän on siinä, että tarvitaan kvanttori $\forall$, ei $\exists$), kunhan kuitenkin salli luvun $\varepsilon > 0$ olla mielivaltainen. Sakkoa ei mennyt myöskään, jos kirjoitti ”olkoon $n > 2/\varepsilon$” (virhehän on siinä, että tarvitaan kvanttori $\exists$, ei $\forall$). Mutta sakkoa meni 1 p, jos valitsi $n = 3/\varepsilon$, sillä $3/\varepsilon$ ei välttämättä ole kokonaisluku. Jos valitsi $n < 2/\varepsilon$, vaikka jatkosta selvisi, että tarkoitti valitsevansa $n > 2/\varepsilon$, niin selvisi 1 p sakolla.

Jos (a)-kohdassa oli saanut tuloksen, että $\overline{S}_J(f) = \underline{S}_J(f)$ (ei mahdollinen, koska f ei vakiofunktio), niin (b)-kohta yksinkertaistui liikaa, jolloin (b)-kohdasta tuli 0 p. Jos (a)-kohdassa oli saanut sellaisen virheellisen tuloksen, joka ei oleellisesti poikennut oikeasta tilanteesta (esimerkiksi $\underline{S}_J(f) = 6 - \frac{1}{n}$ mutta $\overline{S}_J(f) = 6$), niin tästä syystä ei menettänyt pistettäkään. Jos taas (a)-kohdassa sai niin väärät arvot, että ei pätenyt edes $\overline{S}_J(f) - \underline{S}_J(f) \to 0$, kun $n \to \infty$, jolloin integroituvuutta ei saanut osoitettua, niin (b)-kohdasta sai 0 p.

Tulos $\lim_{n\to\infty}(\overline{S}_J(f) - \underline{S}_J(f)) = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} = 0$ ei riittänyt, sillä tästä olisi pitänyt esittää jatkoksi päättely, että kaikilla $\varepsilon > 0$ on täten olemassa sellainen $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, että $\overline{S}_J(f) - \underline{S}_J(f) < \varepsilon$. Tällaista jatkopäättelyä ei ollut tehnyt kukaan. Ratkaisutavasta sai siksi korkeintaan 2 p.

Tulos $\lim_{n\to\infty} \overline{S}_J(f) = \lim_{n\to\infty} \underline{S}_J(f) = 6$ olisi samoin vaatinut jatkopäättelyn, jotta Riemannin integroituvuusehto olisi täyttynyt. Ratkaisutavasta sai korkeintaan 1 p.

Moni oli yrittänyt käyttää integroituvuuden määritelmää: Alaintegraalille $A(f)$ ja yläintegraalille $Y(f)$ pätee

$$6 \leftarrow 6 - \frac{1}{n} = \underline{S}_J(f) \leq A(f) \leq Y(f) \leq \overline{S}_J(f) = 6 + \frac{1}{n} \to 6, \qquad \text{kun } 3 \leq n \to \infty,$$

jolloin siis $A(f) = Y(f) = 6$, ja f on integroituva. Mutta on huomattava, että $Af)$:n ja $Y(f)$:n määritelmässä käytetään välin $[1, 4]$ kaikkia jakoja, ei vain (a)-kohdassa esiintyneitä, jolloin ei selvitä yhtälöillä (a)-kohtaan nojauduttaessa. Ratkaisutavasta sai korkeintaan 1 p.

Teht. 4. (a) *Olkoon* $f\colon [-1, 1] \to \mathbb{R}$ *funktio, jonka toinen derivaatta* f'' *on jatkuva välillä* $[-1, 1]$. *Osoita, että*

$$\int_{-1}^{1} xf''(x)\,dx = f'(1) + f'(-1) - f(1) + f(-1).$$

(b) *Laske*

$$\int_{-1}^{1} xe^x\,dx.$$

Ratk. (a) Osittaisintegrointi antaa

$$\int_{-1}^{1} xf''(x)\,dx = \Big/_{\!\!-1}^{1} xf'(x) - \int_{-1}^{1} 1f'(x)\,dx = \Big/_{\!\!-1}^{1} xf'(x) - \Big/_{\!\!-1}^{1} f(x) = (1f'(1) - (-1)f'(-1)) - (f(1) - f(-1))$$
$$= f'(1) + f'(-1) - f(1) + f(-1).$$

(b) Olkoon $f(x) = e^x$ kaikilla $x \in [-1, 1]$. Silloin $f = f' = f''$. Täten (a)-kohta antaa

$$\int_{-1}^{1} xe^x\,dx = f(1) + f(-1) - f(1) + f(-1) = 2f(-1) = 2e^{-1} = \frac{2}{e}.$$

Arvostelusta. (a) 3 p.

(b) 3 p. Tosiasiaa, että funktiolle $f(x) = e^x$ on $f = f' = f''$, sai pitää niin tuttuna, että sitä ei tarvinnut erikseen sanoa, jos sovelsi (a)-kohtaa.