Analyysi II, korvaava 1. kurssikoe to 12.3.2015, ratk. (Jouni Luukkainen)

Teht. 1. *Laske* $\int_0^2 x^2\sqrt{1+x^3}\,dx$ *sijoituksella* $u = 1 + x^3$.
Ratk. Nyt $du = u'(x)\,dx = 3x^2\,dx$, $u(0) = 1$ ja $u(2) = 9$, joten

$$\int_0^2 x^2\sqrt{1+x^3}\,dx = \int_1^9 \frac{1}{3}u^{1/2}\,du = \Big/_1^9 \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}u^{3/2} = \frac{2}{9}(9\sqrt{9} - 1\sqrt{1}) = \frac{2}{9}(9\cdot 3 - 1\cdot 1) = \frac{2}{9}\cdot 26 = \frac{52}{9}.$$

Huom. Jos sijoituksen toteuttaisi muodossa $x = (u-1)^{1/3}$, jolloin $dx = \frac{1}{3}(u-1)^{-2/3}\,du$, niin pitäisi olettaa, että $u > 1$, jolloin tulisi alarajalla epäoleellinen integraali $\int_1^9 (u-1)^{2/3}\sqrt{1+u-1}\frac{1}{3}(u-1)^{-2/3}\,du$, mutta tästä saataisiin supistuksen ja rajankäynnin ($a \to 1$ alarajalle $a > 1$) jälkeen sama varsinainen Riemannin integraali $\int_1^9 \frac{1}{3}u^{1/2}\,du$ kuin yllä.
Arvostelusta.

Teht. 2. *Tutki, suppeneeko epäoleellinen integraali* $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$.
Ratk. Integraali on epäoleellinen molemmilla rajoillaan (alarajalla, koska $1/\sqrt{x-1} \to \infty$, kun $x \to 1+$). Määritelmän mukaan integraali $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$ suppenee, jos integraalit $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$ ja $\displaystyle\int_2^\infty \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$ (katkaisupisteenä voisi luvun 2 sijasta olla mikä tahansa luku $c > 1$) suppenevat. Jos $x \geq 2$, niin $0 < x - 1 < x$, joten $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{x-1}} > \frac{1}{\sqrt{x}} > 0$. Tiedetään, että koska $1/2 < 1$, niin integraali $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}}$ hajaantuu ($= \infty$), jolloin myös integraali $\displaystyle\int_2^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}}$ hajaantuu ($= \infty$). Täten minoranttiperiaatteen nojalla integraali $\displaystyle\int_2^\infty \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$ hajaantuu ($= \infty$). Siis integraali $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$ hajaantuu.

Integraalin $\displaystyle\int_2^\infty \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$ hajaantuminen voidaan vaihtoehtoisesti osoittaa suoraankin: Jos $b > 2$, niin

$$\int_2^b \frac{dx}{\sqrt{x-1}} = \Big/_2^b 2\sqrt{x-1} = 2(\sqrt{b-1} - 1) \to \infty, \qquad \text{kun } b \to \infty.$$

Huom. Jos $1 < a < 2$, niin $\displaystyle\int_a^2 \frac{dx}{\sqrt{x-1}} = \Big/_a^2 2\sqrt{x-1} = 2(1 - \sqrt{a-1}) \to 2$, kun $a \to 1$, joten integraali $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$ suppenee, eikä sen tutkiminen olisi siis riittänyt.
Arvostelusta.

Teht. 3. *Olkoon* $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ *funktio*

$$f(x) = \begin{cases} -1, & -1 \leq x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1, & 0 < x \leq 1, \end{cases}$$

ja olkoon J_n *välin* $[-1,1]$ *tasavälinen jako* n*:ään osaväliin, missä* $n \in \mathbb{N}_1$.
(a) *Laske Riemannin summa* $S_{J_n}(f, z_1, \dots, z_n)$, *kun* z_k *on välin* $\Delta_k = [x_{k-1}, x_k]$ *keskipiste,* $k = 1, \dots, n$.
(b) *Osoita, että* f *on integroituva. Voit käyttää kaikkia kurssin integroituvuutta koskevia tuloksia.*
Ratk. (a) 3 p. Olkoon $n \in \mathbb{N}_1$. Jaon J_n jakovälien pituus on $2/n$, jakopisteet ovat $x_k = -1 + 2k/n$ ($0 \leq k \leq n$) ja jakovälin $[x_{k-1}, x_k]$ keskipiste on $z_k = (x_{k-1} + x_k)/2$ ($1 \leq k \leq n$). Kysytty Riemannin summa on $S_{J_n}(f, z_1, \dots, z_n) = \sum_{k=1}^n f(z_k)(x_k - x_{k-1}) = (2/n)\sum_{k=1}^n f(z_k)$.

Tapaus n parillinen: Nyt $z_{n+1-k} = -z_k$ ja siis $f(z_{n+1-k}) = 1$ sekä $f(z_k) = -1$, kun $1 \leq k \leq n/2$. Täten

$$S_{J_n}(f, z_1, \ldots, z_n) = \frac{2}{n}\left(\sum_{k=1}^{n/2} f(z_k) + \sum_{k=n/2+1}^{n} f(z_k)\right) = \frac{2}{n}\left(\frac{n}{2}\cdot(-1) + \frac{n}{2}\cdot 1\right) = 0.$$

Tapaus n pariton: Nyt $z_{n+1-k} = -z_k$ ja siis $f(z_{n+1-k}) = 1$ sekä $f(z_k) = -1$, kun $1 \leq k \leq (n-1)/2$. Edelleen $z_{(n+1)/2} = 0$ ja siis $f(z_{(n+1)/2}) = 0$. Täten

$$\begin{aligned} S_{J_n}(f, z_1, \ldots, z_n) &= \frac{2}{n}\left(\sum_{k=1}^{(n-1)/2} f(z_k) + f(z_{(n+1)/2}) + \sum_{k=(n+1)/2+1}^{n} f(z_k)\right) \\ &= \frac{2}{n}\left(\frac{n-1}{2}\cdot(-1) + 1\cdot 0 + \frac{n-1}{2}\cdot 1\right) = 0. \end{aligned}$$

Siis $S_{J_n}(f, z_1, \ldots, z_n) = 0$ jokaisella $n \in \mathbb{N}_1$.

(b) 3 p. Funktio f on integroituva kustakin seuraavasta syystä:

- Funktio f on kasvava (sillä $f(x) \leq f(y)$ aina, kun $-1 \leq x < y \leq 1$).
- Funktio f on jatkuva yhtä pistettä $x = 0$ lukuunottamatta ja rajoitettu (sillä $-1 \leq f(x) \leq 1$ jokaisella $x \in [-1, 1]$).
- Funktio f on paloittain jatkuva (sillä f on jatkuva väleillä $[-1, 0[$ ja $]0, 1]$ ja pisteessä $x = 0$ sillä on äärelliset toispuoleiset raja-arvot $\lim_{x\to 0-} f(x) = -1$ ja $\lim_{x\to 0+} f(x) = 1$).
- Funktio f on porrasfunktio (jakona $x_0 = -1$, $x_1 = 0$ ja $x_2 = 1$ sekä vakioina $c_1 = -1$ ja $c_2 = 1$).

Arvostelusta.

Teht. 4. (a) *Olkoon $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ funktio, jonka derivaatta f' on jatkuva välillä $[a, b]$. Osoita, että*

$$\int_a^b x f'(x)\,dx = bf(b) - af(a) - \int_a^b f(x)\,dx.$$

(b) *Laske*

$$\int_0^{\pi/4} x(1 + \tan^2 x)\,dx.$$

Ratk. (a) 3 p. Osittaisintegrointi antaa

$$\int_a^b x f'(x)\,dx = \Big/_{\!a}^{\,b} x f(x) - \int_a^b 1\cdot f(x)\,dx = bf(b) - af(a) - \int_a^b f(x)\,dx.$$

(b) 3 p. Huomataan, että $D_x \tan x = 1 + \tan^2 x$. Siis soveltamalla (a)-kohtaa saadaan

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/4} x(1+\tan^2 x)\,dx &= \frac{\pi}{4}\tan\frac{\pi}{4} - 0\tan 0 - \int_0^{\pi/4} \tan x\,dx = \frac{\pi}{4}\cdot 1 - 0 - \Big/_{\!0}^{\,\pi/4} (-\ln|\cos x|) \\ &= \frac{\pi}{4} + \ln\left|\cos\frac{\pi}{4}\right| - \ln|\cos 0| = \frac{\pi}{4} + \ln\frac{1}{\sqrt{2}} - \ln 1 = \frac{\pi}{4} + \ln 2^{-1/2} - 0 = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}. \end{aligned}$$

Arvostelusta.