

# Algebra I

Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos

2. kurssikoe

7.5.2014

*Kokeessa ei saa käyttää laskinta tai taulukkokirjaa.*

1. (12 pistettä) Tutkitaan kuvausta  $f: 6\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_7$ ,  $f(a) = [a/6]_7$ .

(a) Osoita, että  $f$  on homomorfismi.

(b) Seuraavassa on yritetty osoittaa, että kuvauksen  $f$  ydin on  $42\mathbb{Z}$ . Todistus ei kuitenkaan ole pätevä. Selitä lyhyesti, mikä todistuksessa on vialla.

”Oletetaan, että  $a \in 42\mathbb{Z}$ . Nyt  $k = 42k$  jollakin  $k \in \mathbb{Z}$ . Huomataan, että

$$f(a) = f(42k) = [7k]_7 = [0]_7.$$

Siten  $\text{Ker } f = 42\mathbb{Z}$ .”

(c) Korjaa edellisen kohdan todistusta niin, että se toimii.

(d) Millainen isomorfismi homomorfismista  $f$  saadaan ryhmien homomorfialauseen avulla? Minkä alkio kuvautuu kyseisessä isomorfismissa alkioille  $[5]_7$ ?

2. (12 pistettä) Ryhmän  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$  aliryhmästä  $H$  tiedetään, että siinä on kaksi alkioita. Lisäksi eräs  $H$ :n sivuluokista on  $\{([1]_2, [1]_4), ([1]_2, [3]_4)\}$ .

(a) Kuinka monta sivuluokkaa  $H$ :lla on?

(b) Määritä  $H$ :n alkioita.

(c) Piirrä sivuluokkien joukosta  $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4)/H$  kuva, jossa joukon rakenne näkyy mahdollisimman tarkasti. Voit itse valita mielestäsi parhaan havainnollistustavan.

3. (12 pistettä)

(a) Selitä lyhyesti, kuinka tekijäryhmät ja normaalit aliryhmät liittyvät toisiinsa.

(b) Oletetaan, että  $G$  on syklinen ryhmä, jolla on normaali aliryhmä  $N$ . Osoita, että tekijäryhmä  $G/N$  on syklinen.

4. (12 pistettä) Tutkitaan rengasta  $R = \{a, b, c, d\}$ , jolla on oheiset laskutoimitustaulut:

$+$	$a$	$b$	$c$	$d$	$\cdot$	$a$	$b$	$c$	$d$
$a$	$a$	$b$	$c$	$d$	$a$	$a$	$a$	$a$	$a$
$b$	$b$	$c$	$d$	$a$	$b$	$a$	$b$	$c$	$d$
$c$	$c$	$d$	$a$	$b$	$c$	$a$	$c$	$a$	$c$
$d$	$d$	$a$	$b$	$c$	$d$	$a$	$d$	$c$	$b$

(a) Mikä on renkaan  $R$  ykkösalkio?

(b) Onko  $R$  kokonaisalue?

(c) Määritä renkaan  $R[X]$  polynomin  $P = X^2 - 3X + 1$  juuret.