

Algebralliset rakenteet I

Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos

Kevät 2015

Harjoitus 7 (Kertaustehtäviä, joita ei palauteta tai tarkasteta)

Tehtävien viimeinen palautuspäivä: Ei palauteta

Korjausten viimeinen palautuspäivä: Ei palauteta

Tehtäväsarja I

Nämä tehtävät muodostivat viime vuoden 1. välikokeen.

1. (a) Mitkä seuraavista laskuista on laskettu oikein?

$$[3]_8 + [7]_8 = [5]_8 \quad [-2]_4 + [3]_4 = [-7]_4 \quad - [4]_5 = [6]_5$$

Perustele vastauksesi.

- (b) Määritellään rationaalilukujen joukossa laskutoimitus $*$ ehdolla

$$a * b = a - 10 + b.$$

Osoita, että laskutoimituksella on neutraalialkio. Onko luvulla 2 käänteisalkiota laskutoimituksen $*$ suhteen?

2. (a) Miten määritellään ryhmäisomorfismi?
(b) Jos ryhmien välillä on isomorfismi, ryhmät ovat rakenteeltaan samanlaiset. Isomorfismin määritelmässä ei kuitenkaan suoranaisesti sanota mitään tällaista. Selitä lyhyesti omin sanoin, miksi isomorfismin määritelmästä seuraa, että isomorfisten ryhmien algebralliset ominaisuudet ovat samanlaiset.
(c) Ryhmällä $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$ on aliryhmä $H = \{20^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$. Osoita isomorfisuuden määritelmän perusteella, että ryhmä $(\mathbb{Z}, +)$ on isomorfinen ryhmän (H, \cdot) kanssa.
3. (a) Määritä ryhmän S_6 alkion $(425)(136)$ virittämä aliryhmä $\langle (425)(136) \rangle$. Mikä on alkion $(425)(136)$ kertaluku? Perustele vastauksesi huolellisesti.
(b) Anna esimerkki syklistä ryhmästä, joka on ääretön. Mikä on keksimäsi ryhmän virittäjä?
4. (a) Olkoon G vaihdannainen ryhmä, jolla on aliryhmät H ja K . Osoita, että aliryhmien tulo $HK = \{hk \mid h \in H, k \in K\}$ on ryhmän G aliryhmä.
(b) Anna esimerkki ryhmästä G ja sen aliryhmistä H ja K , joiden tulo HK ei ole G :n aliryhmä.

Tehtäväsarja II

5. Tarkastellaan ryhmää $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +)$, missä yhteenlaskuna on siis summa:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2).$$

Osoita, että

$$N = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{Z}\}$$

on $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +)$:n syklinen aliryhmä.

6. (a) Listaa sivuluokan $(-2, 1) + N$ alkiot. (Aliryhmä N on määritelty edellisessä tehtävässä.)
(b) Määritä sivuluokkien joukko $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/N$ ja selitä sanallisesti, mitkä alkiot kuuluvat aina samaan sivuluokkaan.

Tehtäväsarja III

7. Kuvittele, että saisit ottaa kokeeseen mukaan A5-kokoisen lunttilapun, jonka yhdelle puolelle on kirjoitettu normaalin kokoista tekstiä. Mitä kirjoittaisit lunttilappuun?

Ja ei, kokeeseen et todellakaan saa ottaa mukaan minkäänlaista lunttilappua :)

8. Piirrä itsellesi käsittekartta, josta löytyvät ainakin seuraavat sanat: aliryhmä, bijektio, isomorfismi, jäännösluokka, kertaluku, käänteisalkio, laskutoimitus, laskutoimitustaulu, liitännäisyys, monikerta, neutraalialkio, permutaatio, potenssi, ryhmä, sykli, syklinen ryhmä, symmetrinen ryhmä, sivuluokka, vaihdannaisuus, vastaalkio, virittäminen, ekvivalenssirelaatio.