Algebralliset rakenteet I
Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kevät 2015
Harjoitus 5

Tehtävien viimeinen palautuspäivä: pe 13.2.2015 klo 19.30
Korjausten viimeinen palautuspäivä: pe 27.2.2015 klo 19.30

Tehtäväsarja I

Tutustu kirjan lukuun 6.1, jossa käsitellään aliryhmän virittämistä.

1. Merkitään $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$. Mitkä seuraavista alkoista ovat ryhmän $\mathbb{Q}^*$ aliryhmässä $\langle 3 \rangle$?
$$27, \quad 6, \quad \frac{1}{9}, \quad -3$$

2. Määritä ryhmän $\mathbb{Z}$ aliryhmät $\langle 10 \rangle$ ja $\langle -10 \rangle$.

Tehtäväsarja II

3.* Tuloryhmällä $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ on aliryhmä $H = \{(a, 2a) \mid a \in \mathbb{R}\}$. Osoita, että ryhmä $(\mathbb{R}, +)$ on isomorfinen ryhmän $(H, +)$ kanssa. (Ryhmässä H laskutoimituksena on komponenteittain määritelty yhteenlasku.)

4. Tarkastellaan tason yksikköparaabelin kuvaajaa
$$P = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}; y = x^2\}.$$
Keksitkö joukkoon P laskutoimituksen $*$ siten että $(\mathbb{R}, +)$ on isomorfinen ryhmän $(P, *)$ kanssa?

Tehtäväsarja III

Tässä kohtaa kurssikirjan 1. ja 2. painos poikkeavat hieman toisistaan. Jos omistat 1. painoksen, täytyy sinun ryhtyä tutustumaan lukuun 6.2.

5. Määritä ryhmän $\mathbb{Z}_{15}$ aliryhmä $\langle [10]_{15} \rangle$. Jotta perustelusi on täsmällinen, käytä lemmaa 6.6. (Ensimmäisessä painoksessa lemman numero on 6.7.)

6. Edellisen tehtävän vastaus on $\langle [10]_{15} \rangle = \{[0]_{15}, [5]_{15}, [10]_{15}\}$. Kuitenkin määritelmän mukaan alkion $[10]_{15}$ virittämässä aliryhmässä pitäisi olla kaikki alkion $[10]_{15}$ kokonaislukumonikerrat. Mikä aliryhmän alkioista on $4 \cdot [10]_{15}$? Entä $(-2) \cdot [10]$?

7. Tutkitaan matriisiryhmän $GL_2(\mathbb{R})$ alkiota $A = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right]$. Määritä aliryhmä $\langle A \rangle$. Mikä aliryhmän alkioista on A^5? Entä A^{-2}?

Tehtäväsarja IV

8. Määritä seuraavien ryhmän S_6 alkioiden kertaluvut:

$$(14), \quad (253), \quad (14)(253).$$

9. Tutkitaan korttipakkaa, jossa on kymmenen korttia. Sekoitetaan kortteja niin, että otetaan pakan päältä neljän kortin pino ja laitetaan se pakan alle. Kuinka monen sekoituskerran jälkeen ollaan takaisin lähtötilanteessa?

   Vihje: Edellisen tehtävän havainnoista on hyötyä.

Tehtäväsarja V

Tutustu kirjan lukuun 8, jossa käsitellään syklisiä ryhmiä.

10. Ryhmällä $\mathbb{Z}_{16}$ on aliryhmä $H = \{[0]_{16}, [4]_{16}, [8]_{16}, [12]_{16}\}$. Onko olemassa alkiota, joka virittää aliryhmän H? Toisin sanoen, onko H syklinen?

11. Onko ryhmän S_5 aliryhmä $\{(1), (25), (34), (25)(34)\}$ syklinen?

Tehtäväsarja VI

Kertaa ekvivalenssirelaation käsite kurssilta Johdatus yliopistomatematiikkaan tai tutustu lukuun 9, jossa käsitellään ekvivalenssirelaatioita.

12. Määritellään kokonaislukujen joukossa relaatio $\sim$ ehdolla

$$a \sim b, \quad \text{jos luvussa } a \text{ on yhtä monta numeroa kuin luvussa } b.$$

   Osoita, että $\sim$ on ekvivalenssirelaatio. Miltä näyttävät sen ekvivalenssiluokat?

13. Määritellään kokonaislukujen joukossa relaatio $\sim$ ehdolla

$$a \sim b, \quad \text{jos} \quad -a + b \in 7\mathbb{Z}.$$

   Osoita, että $\sim$ on ekvivalenssirelaatio. Mikä tuttu relaatio on itse asiassa kyseessä?

14. Jatkoa edelliseen tehtävään. Määritä luvun 11 ekvivalenssiluokka. Missä yhteydessä olet aiemmin törmännyt tähän joukkoon?

Tehtäväsarja VII

15.* Olkoon $f\colon G \to H$ ryhmäisomorfismi. Osoita, että jos G on vaihdannainen ryhmä, myös H on vaihdannainen ryhmä.

16. Onko jäännösluokkaryhmä $\mathbb{Z}_6$ isomorfinen symmetrisen ryhmän S_3 kanssa?

Ylimääräinen tehtävä

17. Ovatko ryhmät $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ ja $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ isomorfiset? Huomaa, että joukot $\mathbb{R}^*$ ja C^* ovat yhtä mahtavat, eli niiden välillä on olemassa bijektio.