Algebralliset rakenteet I
Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kevät 2015
Harjoitus 4

Tehtävien viimeinen palautuspäivä: pe 6.2.2015 klo 19.30
Korjausten viimeinen palautuspäivä: pe 20.2.2015 klo 19.30

Tehtäväsarja I

1. Etsi neljä jäännösluokkaryhmän $\mathbb{Z}_6$ aliryhmää. Perustele vastauksesi.

2. Aliryhmät ovat aina ryhmiä. Aliryhmän määritelmässä ei kuitenkaan suoranaisesti sanota mitään tällaista. Selitä lyhyesti omin sanoin, miksi aliryhmän määritelmästä seuraa, että se on ryhmä.

Tehtäväsarja II

3. Laske ryhmässä S_5 tulo $\sigma\tau$, kun
   (a) $\sigma = (125)(34)$ ja $\tau = (25)(34)$
   (b) $\sigma = (132)$ ja $\tau = (15)$.

   Anna vastaus syklimuodossa.

4.* Tarkastellaan ryhmää S_6.
   (a) Määritä sen neutraalialkio.
   (b) Määritä permutaatioden $(13)(254)$ ja (34) käänteisalkiot. Lopulliseen ratkaisuun ei tarvitse kirjata kertolaskujen kaikkia välivaiheita.

5.* Ratkaise yhtälö $(34)x(13)(254) = (132)$ ryhmässä S_5.
   Neuvo: Jos käytät ekvivalenssinuolia, muista perustella niiden käyttö.

Tehtäväsarja III

Tutustu kirjan lukuihin 5.1 ja 5.2, jotka käsittelevät ryhmien kertotauluja ja isomorfisuutta.

6. (a) Kirjoita jäännösluokkaryhmän $\mathbb{Z}_3$ yhteenlaskutaulu.
   (b) Ryhmällä S_4 on aliryhmä $H = \{(1), (134), (143)\}$. Kirjoita H:n kertotaulu.
   (c) Ryhmät $\mathbb{Z}_3$ ja H ovat isomorfiset. Etsi kertotaulujen avulla vastaavuus näiden kahden ryhmän välille.

7. Symmetrisellä ryhmällä S_4 on aliryhmä $H = \{(1), (1234), (1432), (13)(24)\}$. Kirjoita ryhmän H kertotaulu. Tiedetään, että neljän alkion ryhmiä on vain kaksi erilaista. Kumpi niistä H on, neljän alkion syklinen ryhmä vai Kleinin neliryhmä?

8. Kirjoita tuloryhmän $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ yhteenlaskutaulu. Tuloryhmän laskutoimitus määritellään komponenteittain:

$$([a]_2, [b]_2) + ([c]_2, [d]_2) = ([a]_2 + [c]_2, [b]_2 + [d]_2) \quad \text{kaikilla } [a]_2, [b]_2, [c]_2, [d]_2 \in \mathbb{Z}_2.$$

   Onko $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ neljän alkion syklinen ryhmä vai Kleinin neliryhmä? Perustele vastauksesi.

Tutustu kirjan lukuun 5.3, jossa annetaan varsinainen määritelmä isomorfisuudelle.

9. (a) Osoita, että kuvaus $f\colon \mathbb{Z} \to 17\mathbb{Z}$, $f(a) = 17a$ on bijektio.
   (b) Osoita, että ryhmät $(\mathbb{Z}, +)$ ja $(17\mathbb{Z}, +)$ ovat isomorfiset.

Tehtäväsarja IV

10. (a) Oletetaan, että H on ryhmän $\mathbb{Z}$ aliryhmä, jossa on alkio 5. Keksi viisi muuta alkiota, jotka ovat välttämättä aliryhmässä H.
    (b) Oletetaan, että K on ryhmän S_6 aliryhmä, jossa on alkio (254). Pystytkö löytämään viisi muuta alkiota, jotka ovat välttämättä aliryhmässä K? Kuinka monta alkiota löydät?

11. (a) Keksi jokin ryhmän $\mathbb{Z}$ aito aliryhmä, jossa on alkio 5.
    (b) Keksi jokin ryhmän S_6 aito aliryhmä, jossa on alkio (254).

Tehtäväsarja V

Tehtävissä 12–13 tutkitaan ryhmää G ja sen osajoukkoa

$$Z = \{g \in G \mid xg = gx \text{ kaikilla } x \in G\}.$$

12. Kuvaile omin sanoin ilman matemaattisia symboleita, millaisista alkioista joukko Z koostuu.

13. Osoita, että Z on ryhmän G aliryhmä.[1]

14. Jäsennä seuraavat käsitteet käyttäen esimerkiksi sopivaa käsitekarttaa:

    aliryhmä, bijektio, isomorfismi, käänteisalkio, laskutoimitus, laskutoimitustaulu, liitännäisyys, monikerta, neutraalialkio, potenssi, ryhmä, vaihdannaisuus, vasta-alkio

Tehtäväsarja VI

15. Oletetaan, että $a, b \in \mathbb{R}$. Laske matriisien $\left[\begin{smallmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right]$ ja $\left[\begin{smallmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right]$ tulo. Matriisikertolaskusta voit lukea tarvittaessa kurssikirjan liitteestä.

[1] Kyseistä aliryhmää kutsutaan ryhmän G keskukseksi.

16.* Tarkastellaan kääntyvien 2×2 -matriisien ryhmää $GL_2(\mathbb{R})$. Laskutoimituksena on matriisien kertolasku. Tällä ryhmällä on aliryhmä

$$U = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}.$$

Näytä, että kuvaus $f\colon U \to \mathbb{R}$, $\left[\begin{smallmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right] \mapsto a$ on ryhmäisomorfismi. (Ryhmän $\mathbb{R}$ laskutoimitus on luonnollisesti yhteenlasku.)

17. Jatkoa edelliseen tehtävään. Olet nyt osoittanut, että ryhmät $(U, \cdot)$ ja $(\mathbb{R}, +)$ ovat isomorfisia. Selitä omin sanoin, miten tämä näkyy ryhmien alkioiden ulkomuodossa sekä ryhmien laskutoimituksissa.

Ylimääräinen tehtävä

18. Selvitä, mikä tetraedri on. Määritä tetraedrin symmetriaryhmän alkiot. (Tietoa symmetriaryhmistä löytyy luvusta 11.)

    Lisähaaste: Selvitä muiden Platonin kappaleiden symmetriaryhmät.

Kartuta matemaattista sivistystäsi

19. Katso tv-sarja Futuraman jakso The Prisoner of Benda (tuotantokausi 6, jakso 10). Tästä tehtävästä ei jaeta lisäpisteitä.