Algebralliset rakenteet I
Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kevät 2015
Harjoitus 3

Tehtävien viimeinen palautuspäivä: pe 30.1.2015 klo 19.30
Korjausten viimeinen palautuspäivä: pe 13.2.2015 klo 19.30

Tehtäväsarja I

1. Onko $H = \{7^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ ryhmän $(\mathbb{Q}, +)$ aliryhmä?

2.* Onko $H = \{7^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ ryhmän $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$ aliryhmä?

3. Onko $(K_{12}, \oplus)$ ryhmän $(\mathbb{Z}, +)$ aliryhmä?

Tehtäväsarja II

Lue kirjasta kappale 4.1, jossa käsitellään permutaatioita. Seuraavissa tehtävissä tutkitaan permutaatioita

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad \rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Piirrä kuvat permutaatioista σ, τ ja ρ. Voit valita mielestäsi parhaan tavan havainnollistaa permutaatiota.

Lue sitten kappale 4.2, jossa käsitellään permutaatioiden tuloa.

5. Laske tulot $\sigma \circ \tau$, $\tau \circ \sigma$ ja $\sigma \circ \rho$. Muista laskujärjestys!

Lue vielä kappaleesta 4.3 permutaation radoista.

6. Määritä permutaatioiden σ, τ ja ρ radat. Kuvista on apua.

Tehtäväsarja III

Kirjan luvussa 4.3 kerrotaan permutaation sykliesityksestä.

7. Seuraavassa on annettu permutaatioiden sykliesityksiä. Piirrä permutaatoista kuvat, joista näkyy, miten permutaatio kuvaa määrittelyjoukon alkioita.
   (a) ryhmän S_4 alkio (1324)
   (b) ryhmän S_6 alkio (1324)
   (c) ryhmän S_5 alkio $(14)(253)$

8. Mitkä seuraavista väitteistä pitävät paikkansa?
   (a) Ryhmän S_6 alkiot $(16)(35)$ ja $(35)(16)$ ovat samat.
   (b) Ryhmän S_4 alkiot (134) ja (143) ovat samat.
   (c) Ryhmän S_6 alkiot (236) ja $(362)(4)(5)$ ovat samat.

9. Määritellään

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 1 & 3 & 6 & 7 & 5 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 3 & 2 & 6 & 4 & 5 & 7 \end{pmatrix}.$$

Kirjoita permutaatioiden α ja β sykliesitykset. Pelkkä vastaus riittää ratkaisuksi.

Tehtäväsarja IV

10. Jäännösluokkien joukossa $\mathbb{Z}_n$ voi määritellä yhteenlaskun kaavalla $[a]_n + [b]_n = [a+b]_n$. Osoita, että

    (a) $[3]_5 + [6]_5 = [4]_5$

    (b) $[5]_7 + [3]_7 = [1]_7$.

    Mitä tuttua laskutoimitusta jäännösluokkien yhteenlasku muistuttaa?

11.* Päteekö $[-6]_3 + [2]_3 = [4]_3$? Perustele vastauksesi.

12. Muotoile tulos, jonka seuraava todistus todistaa.

    Oletetaan, että $x, y, z \in \mathbb{Z}$ ja $x \equiv y \pmod a$ sekä $y \equiv z \pmod a$. Nyt $a \mid (x - y)$ ja $a \mid (y - z)$. On siis olemassa $k, l \in \mathbb{Z}$, joille pätee $ka = x - y$ ja $la = y - z$. Tästä seuraa, että $x - z = (x - y) + (y - z) = ka + la = (k + l)a$. Siten $a \mid (x - z)$, eli $x \equiv z \pmod a$.

13. Jäännösluokkien joukko $\mathbb{Z}_5 = \{[0]_5, [1]_5, [2]_5, [3]_5, [4]_5\}$ on ryhmä jäännösluokkien yhteenlaskun suhteen. Kirjoita ryhmän laskutoimitustaulu.

Tehtäväsarja V

14. Tutustu kurssisivulla olevaan yhtälönratkaisua käsittelevään tekstiin.

    Merkitään
    $$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

    (a) Osoita, että
    $$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I.$$
    Voit tarvittaessa kerrata matriisikertolaskua kurssikirjan liitteestä.

    (b) Tutkitaan nyt yhtälöä
    $$XA = C,$$
    missä $X \in \mathbb{R}^{1\times 2}$. Tarkastellaan seuraavaa päättelyketjua:
    $$\begin{aligned} & XA = C \\ \Leftrightarrow\ & XAB = CB \\ \Leftrightarrow\ & XI = CB \\ \Leftrightarrow\ & X = CB \\ \Leftrightarrow\ & X = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$
    Tarkista, että $X = [-1\ 1]$ ei ole yhtälön $XA = C$ ratkaisu. Mikä päättelyssä menee pieleen?

    (c) Vaihda päättelyketjussa ekvivalenssinuolten tilalle tarpeen mukaan implikaationuolia niin, että päättelyketju on tosi.

15. Oletetaan, että G on ryhmä, jossa on alkiot a ja b. Ratkaise ryhmässä G yhtälö $x^2a^2 = xb$.

    Neuvo: Muista edellisen tehtävän havainnot. Jos käytät yhtälönratkaisussa ekvivalenssinuolia, perustele päättelyn molemmat suunnat. Yhtälöitä on mahdollista ratkaista myös implikaatioiden avulla.

16. Oletetaan, että edellisessä kohdan ryhmä on kellotauluryhmä $(K_7, \oplus)$. Oletetaan lisäksi, että $a = 4$ ja $b = 2$. Mikä tässä tapauksessa on yhtälön ratkaisu?

17.* Tutkitaan ryhmää $G = \{a, b, c, d, e, f\}$, jolla on seuraavanlainen laskutoimitustaulu:

$+$	a	b	c	d	e	f
a	f	d	a	e	b	c
b	e	c	b	f	a	d
c	a	b	c	d	e	f
d	b	a	d	c	f	e
e	d	f	e	a	c	b
f	c	e	f	b	d	a

Määritä seuraavat alkiot:

(a) $-d$ **(b)** $3a + 2e$ **(c)** $(-4)f$.

18. Oletetaan, että $(G, +)$ on vaihdannainen ryhmä, jolla on neutraalialkio e. Osoita, että joukko $H = \{a \in G \mid 3a = e\}$ on ryhmän G aliryhmä.

Ylimääräinen tehtävä

19. Lauseessa 3.17 on osoitettu, että kahden aliryhmän leikkaus on aina aliryhmä. Milloin kahden aliryhmän yhdiste on aliryhmä?