Algebralliset rakenteet I
Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kevät 2015
Harjoitus 2

Tehtävien viimeinen palautuspäivä: pe 23.1.2015 klo 19.30
Korjausten viimeinen palautuspäivä: pe 6.2.2015 klo 19.30

Tehtäväsarja I

1. Voiko joukossa $\mathbb{N}$ määritellä laskutoimituksen $*$ kaavalla $a * b = a^2 - 2b + 5$?

2. Merkitään $X = \{0, 1, 2\}$. Voiko potenssijoukossa $\mathcal{P}(X)$ määritellä laskutoimituksen $\triangle$ kaavalla $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$?[1]

3. Osoita, että rationaalilukujen joukossa ei voi määritellä laskutoimitusta $\odot$ kaavalla
$$\frac{m}{n} \odot \frac{k}{l} = \frac{m + k}{n^2 + l^2}.$$
Tässä $m, k \in \mathbb{Z}$ ja $n, l \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

4.* Olkoon $*$ joukon S liitännäinen laskutoimitus. Oletetaan, että joukon S alkioilla x ja y on käänteisalkiot. Osoita, että alkiolla $x * y$ on käänteisalkio.

Tehtäväsarja II

Tutustu kurssikirjan lukuun 3, joka käsittelee ryhmiä. Tällä kurssilla on käytössä ryhmän määritelmä, joka on kirjoitettu hieman eri muotoon kuin kirjassa. Määritelmä löytyy tehtäväpaperin lopusta.

5. Määritellään joukossa $S = \{X, Y, Z\}$ laskutoimitus $\square$ seuraavan laskutoimitustaulun avulla:

$\square$	X	Y	Z
X	X	Z	Y
Y	Y	X	Z
Z	Z	Y	Y

Onko $(S, \square)$ ryhmä?

6. Määritellään reaalilukujen joukossa laskutoimitus $\oplus$ kaavalla $x \oplus y = 3xy$. Osoita, että $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \oplus)$ on ryhmä.

7. Suljetulla välillä $I = [-2, 2]$ voidaan määritellä laskutoimitus $\boxdot$ kaavalla $a \boxdot b = \max\{a, b\}$. Onko $(I, \boxdot)$ ryhmä?

[1] Operaatiota $\triangle$ kutsutaan symmetriseksi erotukseksi.

Tehtäväsarja III

Tutustu kurssikirjan lukuun 3.6, joka käsittelee aliryhmiä.

8. Osoita, että $A = \{5, 10, 15\}$ on kellotauluryhmän K_{15} aliryhmä. Apuna kannattaa käyttää joukon A laskutoimitustaulua.

9. Oletetaan, että H on kellotauluryhmän K_{20} aliryhmä, jossa on alkio 8. Osoita, että seuraavat alkiot kuuluvat aliryhmään H:

$$20, 16, 12, 4.$$

10. Onko $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ ryhmän $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ aliryhmä?

Tehtäväsarja IV

Tutustu lukuun 7.5 jossa käsitellään kongruenssia.

11. Mitkä seuraavista väitteistä pätevät?

(a) $8 \equiv 50 \pmod 6$ (b) $13 \equiv 4 \pmod{11}$ (c) $-4 \equiv 11 \pmod 5$

12. Keksi neljä alkiota, jotka ovat joukossa $[5]_7$.

13.* Luettele jäännösluokkien $[6]_{10}$ ja $[26]_{10}$ alkiot. Vaikuttaako siltä, että $[6]_{10} = [26]_{10}$? Tarkkoja perusteluja ei tarvita.

14. Ovatko jäännösluokat $[-3]_5$ ja $[21]_5$ samat? Miten ongelman voi ratkaista täsmällisesti, jäännösluokkien alkioita määrittämättä?

Tehtäväsarja V

15.* Tutkitaan ryhmää $G = \{a, b, c, d\}$, jolla on seuraava laskutoimitustaulu:

$\cdot$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	c	d	a
c	c	d	a	b
d	d	a	b	c

Määritä alkiot b^4 ja d^{-2}. (Pelkkä vastaus ei riitä. Muista perustelut.)

16. Olkoon G ryhmä. Oletetaan, että $(xy)^2 = x^2y^2$. kaikilla $x, y \in G$. Osoita, että ryhmä G on vaihdannainen.

Ylimääräinen tehtävä

Seuraavalla tehtävällä voit korvata minkä tahansa tähdettömän tehtävän.

17. Kurssikirjassa on osoitettu, että ryhmän laskutoimitustaulussa kukin alkio esiintyy jokaisella rivillä ja jokaisessa sarakkeessa täsmälleen kerran.

    Oletetaan, että äärellisessä epätyhjässä joukossa S on määritelty laskutoimitus $*$. Jos kukin joukon alkio esiintyy laskutoimitustaulun jokaisella rivillä ja jokaisessa sarakkeessa täsmälleen kerran, onko $(S, *)$ välttämättä ryhmä?

Ryhmän määritelmä

Määritelmä. Joukko G laskutoimituksella $*$ varustettuna on *ryhmä*, jos seuraavat ehdot ovat voimassa:

(G1) Laskutoimitus $*$ on liitännäinen.

(G2) Joukossa G on neutraalialkio laskutoimitukselle $*$.

(G3) Jokaisella G:n alkiolla on käänteisalkio laskutoimituksen $*$ suhteen.

Ryhmän määritelmän ensimmäiseen lauseeseen sisältyy väite siitä, että $*$ on joukon G laskutoimitus. Kun siis osoitetaan pari $(G, *)$ ryhmäksi, on tarkistettava, että $*$ on todellakin joukon G laskutoimitus. Tämä tarkoittaa sitä, että kaikille joukon G alkiopareille pitää pystyä määrittämään laskutoimituksessa täsmälleen yksi tulos, ja tuon tuloksen täytyy olla joukon G alkio. (Kurssikirjassa mainittu ehto (G0) sisältyy näihin ehtoihin.)