

Algebralliset rakenteet I
Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kevät 2015
Harjoitus 1

Tehtävien viimeinen palautuspäivä: pe 16.1.2015 klo 19.30
Korjausten viimeinen palautuspäivä: pe 30.1.2015 klo 19.30

Viittaukset kurssimateriaaliin ovat kurssikirjan toiseen painokseen.

Ylimääräinen tehtävä 19 on hieman haastavampi. Voit korvata sillä minkä tahansa tähdettömän tehtävän.

Tehtäväsarja I

Tutustu kurssikirjan lukuun 2, jossa käsitellään laskutoimituksia.

Määritellään joukolle $K_{12} = \{1, 2, 3, \dots, 12\}$ laskutoimitus \oplus , jota kutsutaan kellotaulusummaksi: jos $n, m \in K_{12}$, niin $n \oplus m$ on se kellonaika, joka saadaan, kun kellonaikaan n lisätään m tuntia. Esimerkiksi $2 \oplus 6 = 8$ ja $9 \oplus 4 = 1$.

1. Määritä kellonajat $3 \oplus 8$, $10 \oplus 6$ ja $12 \oplus 8$.
2. Kuvitellaan kellotaulu, jossa on 11 tuntia, ja tarkastellaan kellotaulusummaa joukossa $K_{11} = \{1, 2, 3, \dots, 11\}$. Mitä saat nyt tulokseksi edellisen tehtävän laskuista?

Tehtäväsarja II

Äärellisessä joukossa määritellyn laskutoimituksen kaikki mahdolliset tulokset voidaan kirjoittaa *laskutoimitustauluun*. Taulun sarakkeet ja rivit nimetään joukon S alkiolla, ja taulukon riville x sarakkeeseen y kirjoitetaan tulos $x * y$.

3. Oheinen laskutoimitustaulu määrittelee erään hedelmien joukon laskutoimituksen. Kutsutaan tätä laskutoimitusta hedelmäkertolaskuksi.

\otimes	omena	banaani	päärynä	luumu
omena	luumu	omena	päärynä	banaani
banaani	omena	banaani	päärynä	luumu
päärynä	päärynä	päärynä	luumu	omena
luumu	banaani	luumu	omena	luumu

Määritä seuraavat hedelmät: päärynä \otimes banaani, omena \otimes luumu, päärynä \otimes omena.

Tehtäväsarja III

Tutustu kurssikirjan lukuun 2.1, jossa käsitellään laskutoimituksen liitännäisyyttä ja vaihdannaisuutta.

4. Osoita, että tehtävän 3 hedelmäkertolasku ei ole liitännäinen.
5. Tehtävän 3 hedelmäkertolasku on vaihdannainen. Miten se näkyy laskutoimitustaulussa?
6. Määritellään reaaliluvuille laskutoimitus $*$ kaavalla $x * y = x^2 + y^2$. Onko laskutoimitus liitännäinen?

- 7.* Määritellään kokonaisluvuille laskutoimitus $*$ kaavalla $x * y = x - xy - y$. Onko laskutoimitus vaihdannainen? (Muista perustella vastauksesi huolellisesti.)
- 8.* Määritellään reaaliluvuille laskutoimitus $*$ kaavalla $x * y = 2xy$. Onko laskutoimitus liitännäinen?

Tehtäväsarja IV

Tutustu kurssikirjan lukuun 2.2, jossa käsitellään laskutoimituksen neutraalialkiota ja alkioiden käänteisalkioita.

9. Määritä joukon K_{12} kellotaulusumman neutraalialkio. Perustelujen ei tarvitse olla tarkat.
10. Jatkoa edelliseen tehtävään. Mitkä ovat alkioiden käänteisalkiot? Perustelujen ei tarvitse olla tarkat.
11. Mikä on neutraalialkio ja mitkä ovat alkioiden käänteisalkiot, jos tutkitaan kellotaulusummaa joukossa $K_6 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$?
12. Tehtävän 3 hedelmäkertolaskulla on neutraalialkio. Mikä se on? Millä hedelmillä on käänteishedelmät?
13. Merkitään $A = \{1, 2\}$. Tutkitaan potenssijoukkoa $\mathcal{P}(A)$. Yhdisteoperaatio \cup on joukon $\mathcal{P}(A)$ laskutoimitus. Kirjoita sen laskutoimitustaulu. Mikä on laskutoimituksen \cup neutraalialkio?
- 14.* Tutkitaan edelleen potenssijoukkoa $\mathcal{P}(A)$, missä A on kuten edellisessä tehtävässä. Leikkausoperaatio \cap on joukon $\mathcal{P}(A)$ laskutoimitus. Kirjoita sen laskutoimitustaulu. Mikä on laskutoimituksen \cap neutraalialkio?
15. Olkoon X joukko. Määritä ne potenssijoukon $\mathcal{P}(X)$ alkiot, joilla on käänteisalkio laskutoimituksen \cap suhteen.

Tehtäväsarja V

Jatkossa tulemme tarvitsemaan lukuteorian tietoja. Tutustu lukuun 7.1 joissa käsitellään jaollisuutta.

16. Mitkä seuraavista pitävät paikkansa?

$$8 \mid -64, \quad 4 \mid 11, \quad 0 \mid 5$$

Tarkkoja perusteluja ei tarvita.

17. Määritä seuraavissa tapauksissa luvun a jakojäännös luvulla b jaettaessa. Perustele vastauksesi jakojäännöksen määritelmän avulla.

$$(a) \ a = 22 \text{ ja } b = 4 \quad (b) \ a = 15 \text{ ja } b = -3 \quad (c) \ a = -14 \text{ ja } b = 3$$

18. Etsi väliltä $[-20, 20]$ kuusi eri lukua, joiden jakojäännös luvulla 7 jaettaessa on 2.

Ylimääräinen tehtävä

Seuraavalla tehtävällä voit korvata minkä tahansa tähdettömän tehtävän.

19. Oletetaan, että $*$ on joukossa S määritelty laskutoimitus. Mitkä seuraavista väitteistä pitävät paikkansa? Perustele vastauksesi.
- (a) Jokaisella $a \in S$ pätee $(a * a) * a = a * (a * a)$.
- (b) Joukon S alkiolla voi olla useita käänteisalkioita laskutoimituksen $*$ suhteen.