Äärellisulotteinen lineaarialgebra, kevät 2015.
Välikoe 2.
6.5.2015
Ratkaisuideat

Huom Nämä ratkaisut ovat osittain ”sketsi”-muotosia, joissa on jätetty välin joitakin tarkempia perusteluja ja välivaiheita. Tarkoitus on esittää ratkaisun oleellinen idea ja kulku.

Kaikissa tehtävässä V on äärellisulotteinen K-vektoriavaruus kunnan K yli ja L on sen operaattori, ellei muuta sanota.

1. Oletetaan, että $\dim V = n \in \mathbb{N}$. Olkoon $f \in V^*$ operaattorin $L^*\colon V^* \to V^*$ ominaisvektori. Osoita, että $\operatorname{Ker} f$ on avaruuden V $(n-1)$-ulotteinen aliavaruus, joka on invariantti operaattorin L suhteen.

   Ratkaisu: Kts. Harj. 9.3.

2. Operaattorin matriisi erään kannan suhteen on

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

   Esitä operaattori Jordanin normaalissa muodossa. Onko operaattori diagonalisoituva?

   Ratkaisu: Lasketaan ensin karakteristinen polynomi. Koska se on determinantti matriisista, jonka viimeisessa sarakkeessa on vain yksi nollasta eroava alkio, determinantti kannattaa kehittää viimeisen sarakkeen mukaan,

$$\chi_L = \det \begin{bmatrix} X & -1 & 0 \\ 4 & X-4 & 0 \\ 2 & -1 & X-2 \end{bmatrix} = (X-2)\det \begin{bmatrix} X & -1 \\ 4 & X-4 \end{bmatrix} = (X-2)(X(X-4)+4) = (X-2)^3.$$

   Toinen vaihtoehto on tietysti laskea χ_L laskimella - jos laskin osaa laskea polynomialkioisten matriisien determinantteja.
   Laskusta seuraa, että ainoa ominaisarvo on 2, eli diagonaalilla esiintyy kolme kakkosta ja kaikki solut ovat 2-soluja. Minimipolynomi on $X-2$, $(X-2)^2$ tai $(X-2)^3$. Laskemalla nähdään suoraan (tätäkin saa tehdä laskimella ja ilmoittaa vaan lopputulos), että $X-2$ ei kelpaa minimipolynomiksi (tämä on melkein itsestään selvä, jos näin olisi operaattori olisi $2\,\mathrm{id}_V$, jolloin sen matriisi olisi diagonaalimatriisi missä tahansa kannassa), mutta $(X-2)^2$ kelpaa, $(L-2)^2 = 0$. Kurssin tietojen mukaan tästä seuraa, että Jordanin normaalimuoto sisältää ainakin yhden (2×2)-kokoisen Jordanin solun. Koska koko matriisi on (3×3), tämän jälkeen ei ole muita vaihtoehtoja kuin lisätä vielä yksi (1×1)-solu, sillä sen enempää ei mahdu. Näin ollen

Jordanin normaalimuoto on (solujen permutaatiota vaille)

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Toinen vaihtoehto olisi sijoittaa solut toisessa järjestyksessä. Huomaa, että Jordanin normaalimuodot lasketaan samoiksi, jos ne ovat samoja solujen permutaatiota vaille. Näin ollen ei ole tarvetta esittää molemmat vaihtoehdot, vaikka se ei ole väärinkään.

3. Oletetaan, että V on K-sisätuloavaruus, missä $K = \mathbb{R}$ tai $K = \mathbb{C}$. Osoita, että skalaari k on operaattorin L ominaisarvo jos ja vain jos $\overline{k}$ on adjungaatin L^* ominaisarvo.

Ratkaisu: k on operaattorin L ominaisarvo jos ja vain jos $\det(k \operatorname{id}_V - L) = 0$. Käyttämällä hyväksi sitä, että $\det A^* = \overline{\det A}$ saadaan

$$\det(k \operatorname{id}_V - L)^* = \overline{\det(k \operatorname{id}_V - L)} = \overline{0} = 0.$$

Koska $(k \operatorname{id}_V - L)^* = \overline{k} \operatorname{id}_V - L^*$, tästä puolestaan seuraa, että $\overline{k}$ on L^*:n ominaisarvo.

Huomautus: Suosittu virhe - siitä, että $L(v) = kv$ päätellään, että $L^*(v) = \overline{k}v$. Tämä ei kuitenkaan edes pidä paikkaansa - jos v on ominaisarvoa k vastaava ominaisvektori L:n suhteen, sen ei tarvitse olla ominaisarvoa $\overline{k}$ vastaava ominaisvektori L^*:n suhteen. Tämä on kyllä totta, jos L on normaali, mutta ei yleisesti.

4. a) Oletetaan, että $\dim \operatorname{Im} L = m$. Osoita, että operaattorilla L on korkeintaan $m+1$ eri ominaisarvoa.
b) Anna esimerkki operaattorista $L\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, jolle $\dim \operatorname{Im} L = 2$ ja jolla on tasan kolme eri ominaisarvoa.

Ratkaisu: a) Olkoot $k_1, \dots, k_n$ *nollasta eroavat* eri operaattorin L ominaisarvot. Riittää osoittaa, että tällöin $n \leq m$ - lisätään vain sen jälkeen mahdollinen nollaominaisarvo. Olkoon $v_i \neq 0$ ominaisarvoa k_i vastaava ominaisvektori, $L(v_i) = k_i v_i$. Tällöin $v_i = L(v_i/k_i) \in \operatorname{Im} L$ (huom, tässä jaetaan k_i:llä, joten se ei saa olla nolla!). Eri ominaisarvoja vastaavat ominaisvektorit muodostavat vapaan jonon, joten $\operatorname{Im} L$ sisältää vapaan jonon $(v_1, \dots, v_n)$, jonka pituus on n. Tästä seuraa, että $n \leq \dim \operatorname{Im} L$.
Toinen tapa olisi leikkiä formaalisti suorien summien ja dimensioiden kanssa. Nimittäin eri ominaisarvovaliavaruudet muodostavat suoran summan, lisäksi edellisen nojalla $V_{k_i} \subset \operatorname{Im} L$, joten

$$\dim \operatorname{Im} L \geq \dim(\oplus_{i=1}^n V_{k_i}) = \sum_{i=1}^n \dim V_{k_i} \geq \sum_{i=1}^n = n.$$

b) Esimerkiksi operaattori jonka matriisi on

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

5. Operaattori $L\colon \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4$ toteuttaa ehdot $L^4 = L^3 \neq L^2$. Mikä on L:n esitys Jordanin normaalissa muodossa? Jos vastaus ei ole yksikäsitteinen, esitä kaikki mahdolliset vaihtoehdot.

   Ratkaisu: Ehdoista seuraa, että $L^4 - L^3 = L^3(L - \mathrm{id})$, joten minimipolynomi on polynomin $X^3(X-1)$ tekijä. Minimipolynomi ei kuitenkaan voi olla polynomin $X^2(X-1)$ tekijä, sillä se tarkoittaisi, että $L^3 = L^2$. Näin ollen minimipolynomi on $X^3(X-1)$ tai X^3. Edellisessä tapauksessa Jordanin normaali muoto on (solujen permutaatiota vaille)

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

   jälkimmäisessä -

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

   Kumpikin vaihtoehto käy, kumpikin matriisi toteuttaa kääntäen oletuksia.

6. Oletetaan, että V on $\mathbb{C}$-sisätuloavaruus ja L on normaali operaattori, jolle pätee $L^9 = L^8$. Osoita, että $L^2 = L$ ja että L on itseadjungoitu.

   Ratkaisu: Tämä on samanlainen kuin Harj 14.1.

7. Oletetaan, että operaattorin L matriisiesitys erään avaruuden V kannan suhteen on Jordanin k-solu, $k \in K$. Osoita, että ei ole olemassa sellaisia avaruuden V epätriviaaleja aitoja L-invariantteja aliavaruuksia $W, W' \leq V$, joille pätisi $W \oplus W' = V$.

   Ratkaisu: Oletetaan, että $V = W \oplus W$, missä W, W' L-invariantteja. Tällöin $\chi_L = \chi_{L|W}\chi_{L|W'}$, joten, koska χ_L on oletusten mukaan esittävissä ensimmäisen asteen tekijöihin, myös $\chi_{L|W}$ ja $\chi_{L|W'}$ ovat. Näin ollen $L|W$ ja $L|W'$ voidaan esittää Jordanin normaalimuodossa. Yhdistämällä näitä esityksiä saadaan L:lle Jordanin normaali muoto, jossa on vähintään kaksi solua. Tämä on ristiriidassa oletusten kanssa, sillä Jordanin normaalimuoto on oleellisesti yksikäsitteinen.

8. Olkoot $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in K[\mathbf{X}]$ keskenään jaottomat. Osoita, että

$$\operatorname{Ker}(pq)(L) = \operatorname{Ker} p(L) \oplus \operatorname{Ker} q(L).$$

Polynomien jaollisuusteoriaa saa käyttää vapaasti.

Ratkaisu: Tämä on oleellisesti Lemma 3.89.