

# Johdatus lineaarialgebraan

## Osa I

Jokke Häsä, Lotta Oinonen, Johanna Rämö

30. elokuuta 2014

Helsingin yliopisto  
Matematiikan ja tilastotieteen laitos

# Sisältö

1	Avaruuksien $\mathbb{R}^2$ ja $\mathbb{R}^3$ vektorit . . . . .	4
	1.1 Kaksiulotteisen avaruuden vektorit . . . . .	4
	1.2 Vektorien laskutoimitukset . . . . .	5
	1.3 Kolmiulotteinen avaruus . . . . .	7
2	Avaruus $\mathbb{R}^n$ . . . . .	9
3	Suorat ja tasot . . . . .	12
	3.1 Suora . . . . .	12
	3.2 Taso . . . . .	16
4	Avaruuden $\mathbb{R}^n$ aliavaruudet . . . . .	18
5	Lineaariset yhtälöryhmät . . . . .	22
	5.1 Lineaarisen yhtälöryhmän määritelmä . . . . .	22
	5.2 Alkeisrivitoimitukset ja porrasmatriisit . . . . .	23
	5.3 Gaussin–Jordanin eliminointimenetelmä . . . . .	26
	5.4 Yhtälöryhmien ekvivalenssin todistus . . . . .	34
6	Virittäminen . . . . .	36
7	Vapaus . . . . .	40
	7.1 Vapauden määritelmä . . . . .	40
	7.2 Homogeeniset yhtälöryhmät ja vapaus . . . . .	45
8	Kanta . . . . .	47
	8.1 Koordinaatit . . . . .	48
	8.2 Dimensio . . . . .	49
9	Matriisit . . . . .	54
	9.1 Matriisien laskutoimituksia . . . . .	54
	9.2 Erityisiä matriiseja . . . . .	56
	9.3 Matriisien laskusääntöjä . . . . .	57
	9.4 Matriisin transpoosi . . . . .	58
	9.5 Käänteismatriisi . . . . .	60
	9.6 Sarakevektorit . . . . .	64
10	Matriisit ja yhtälöryhmät . . . . .	66
	10.1 Alkeismatriisit . . . . .	67
	10.2 Käänteismatriisin määrittäminen - Miksi menetelmä toimii? . . . . .	71
	10.3 Lisää kääntyvyyteen liittyviä tuloksia . . . . .	72
11	Determinantti . . . . .	73
	11.1 Pienten matriisien determinantit . . . . .	73
	11.2 Determinantin kehityskaavat . . . . .	75
	11.3 Determinantin ominaisuuksia . . . . .	77

12	Ominaisarvot ja diagonalisointi . . . . .	81
12.1	Ominaisarvon määritelmä . . . . .	81
12.2	Ominaisarvojen löytäminen . . . . .	84
12.3	Diagonalisointi . . . . .	85
13	Pistetulo . . . . .	91
13.1	Vektorin normi . . . . .	92
13.2	Vektorien kohtisuoruus ja projektio . . . . .	94
13.3	Vektorien välinen kulma . . . . .	98
13.4	Pistetulon sovelluksia . . . . .	100
14	Ristitulo . . . . .	104

<b>Hakemisto</b>	<b>110</b>
------------------	------------

# 1 Avaruuksien $\mathbb{R}^2$ ja $\mathbb{R}^3$ vektorit

Lukiomatematiikassa vektorit esitettiin olioina, joilla on suunta ja pituus. Tason ja kolmiulotteisen avaruuden vektorit kirjoitettiin yleensä yksikkövektorien  $\bar{i}$ ,  $\bar{j}$  ja  $\bar{k}$  avulla. Eräs tason vektori saattoi olla vaikkapa  $\bar{v} = 3\bar{i} - 2\bar{j}$ . Huomattiin, että jokaisella koordinaatiston pisteellä on paikkavektori, jonka komponentit ovat pisteen koordinaatit. Esimerkiksi pisteen  $(3, -2)$  paikkavektori olisi edellä mainittu vektori  $\bar{v}$ .

Kun vektorin käsitettä yleistetään korkeampiin ulottuvuuksiin, osoittautuu helpoimmaksi käsitellä vektoreita ja avaruuden pisteitä samalla tavalla. Esimerkiksi merkintä  $(3, -2)$  tulee tarkoittamaan sekä pistettä  $(3, -2)$  että yllä määriteltyä vektoria  $\bar{v}$ . Myös merkinnät yksinkertaistuvat, kun voidaan luopua yksikkövektoreiden  $\bar{i}$ ,  $\bar{j}$  ja  $\bar{k}$  käytöstä.

Tässä luvussa käsitellään tason ja kolmiulotteisen avaruuden vektoreita. Tasoa ja kolmiulotteista avaruutta kutsutaan nimillä  $\mathbb{R}^2$  ja  $\mathbb{R}^3$ .

## 1.1 Kaksiulotteisen avaruuden vektorit

**Määritelmä 1.1.** Avaruus  $\mathbb{R}^2$  koostuu reaalityyppisistä parista. Toisin sanoen

$$\mathbb{R}^2 = \{(a, b) \mid a \in \mathbb{R} \text{ ja } b \in \mathbb{R}\}.$$

Avaruuden  $\mathbb{R}^2$  alkioita kutsutaan *vektoreiksi*.

*Huom. 1.* Määritelmä tarkoittaa sopimusta. Tässä siis sovitaan, mitä avaruudella  $\mathbb{R}^2$  ja vektoreilla tarkoitetaan. Määritelmää ei tarvitse perustella millään tavalla.

*Huom. 2.* Tarkalleen ottaen vektori  $(a, b)$  on niin kutsuttu *järjestetty pari*. Tämä tarkoittaa sitä, että lukujen  $a$  ja  $b$  järjestyksellä on väliä. Esimerkiksi järjestetty pari  $(1, 2)$  ei ole sama kuin järjestetty pari  $(2, 1)$ .

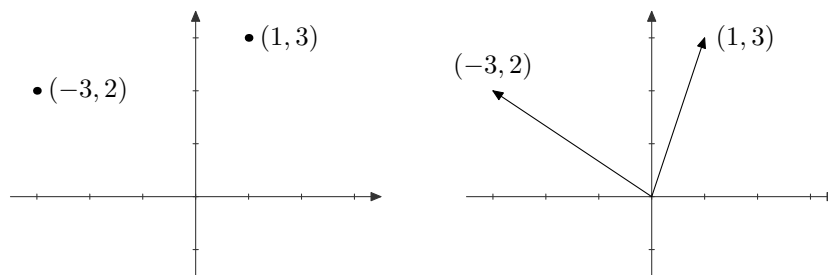
*Huom. 3.* Jos joukko-opin merkinnät (esim.  $\in$ ,  $\subset$ ,  $\setminus$ ) eivät ole tuttuja, voit katsoa apua kurssisivulla olevasta tiedostosta ”Joukko-opin merkintöjä”.

Vektoreita merkitään tässä tekstissä yleensä pienellä kirjaimella, jonka päällä on viiva. Voidaan esimerkiksi kirjoittaa  $\bar{v} = (a, b)$ . Luvut  $a$  ja  $b$  ovat tällöin vektorin  $\bar{v}$  *komponentteja*. Avaruuden  $\mathbb{R}^2$  vektoreissa on aina kaksi komponenttia, ja avaruutta  $\mathbb{R}^2$  kutsutaan *kaksiulotteiseksi vektorivaruudeksi*.

**Esimerkki 1.2.** Esimerkiksi  $\bar{v} = (4, -1)$  ja  $\bar{u} = (\frac{1}{2}, -\sqrt{5})$  ovat avaruuden  $\mathbb{R}^2$  vektoreita. Vektorin  $\bar{v}$  komponentit ovat 4 ja  $-1$ . Vektorin  $\bar{u}$  komponentit ovat puolestaan  $\frac{1}{2}$  ja  $-\sqrt{5}$ .

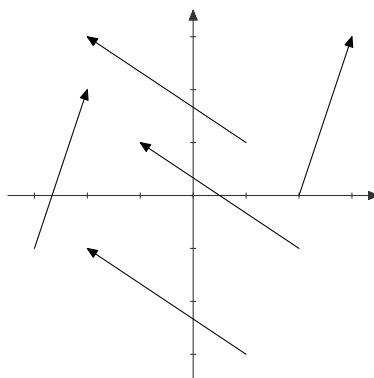
Kaksiulotteisen avaruuden vektoreita voidaan havainnollistaa eri tavoin. Eräs tapa on ajatella vektorit koordinaatiston pisteinä. Vektoria  $(a, b)$  vastaa piste, jonka vaakakoordinaatti on  $a$  ja pystykoordinaatti  $b$ . Kuvassa 1.1 on esitetty vektoreita  $(1, 3)$  ja  $(-3, 2)$  vastaavat tason pisteet.

Vektoria  $(a, b)$  voi kuvata myös pisteen  $(a, b)$  paikkavektorina eli suuntajanana, jonka lähtöpiste on origo ja päätepiste  $(a, b)$ . Vektoreita  $(1, 3)$  ja  $(-3, 2)$  vastaavat paikkavektorit on myös esitetty kuvassa 1.1.



Kuva 1.1: Tason pisteet, jotka vastaavat vektoreita  $(1, 3)$  ja  $(-3, 2)$ , sekä samoja vektoreita vastaavat paikkavektorit.

Pisteen ja paikkavektorin lisäksi avaruuden  $\mathbb{R}^2$  vektoria voi havainnollistaa mistä tahansa pisteestä lähtevällä suuntajanana. Suuntajanana paikalla ei ole väliä, ainoastaan sen suunta ja pituus merkitsevät. Vektoria  $(a, b)$  vastaavalla suuntajanalla on sama suunta ja pituus kuin pisteen  $(a, b)$  paikkavektorilla. Kuvassa 1.2 on esitetty vektoria  $(1, 3)$  vastaavia suuntajanoja sekä vektoria  $(-3, 2)$  vastaavia suuntajanoja.



Kuva 1.2: Vektoreita  $(1, 3)$  ja  $(-3, 2)$  vastaavia suuntajanoja.

Avaruuden  $\mathbb{R}^2$  vektori on siis tällä kurssilla määritelmänsä mukaan kahdesta reaaliluvusta koostuva järjestetty pari. Vektoreita voidaan kuitenkin havainnollistaa pisteinä, paikkavektoreina tai suuntajanoina. Se, millainen havainnollistamistapa on paras, riippuu siitä, mitä ollaan tekemässä. Usein vektoreita käsiteltäessä on pystyttävä vaihtamaan sulavasti yhdestä esitystavasta toiseen.

Koulusta tutut tason yksikkövektorit ovat määritelmän mukaan  $\bar{i} = (1, 0)$  ja  $\bar{j} = (0, 1)$ . Näitä merkintöjä ei käytetä tällä kurssilla.

## 1.2 Vektorien laskutoimitukset

Vektoreille voidaan määritellä erilaisia laskutoimituksia. Yhteenlasku suoritetaan lisäämällä yhteenlaskettavien vektorien komponentit yhteen.

**Määritelmä 1.3.** Oletetaan, että  $\bar{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$  ja  $\bar{w} = (w_1, w_2) \in \mathbb{R}^2$ . Vektoreiden  $\bar{v}$  ja  $\bar{w}$  *summa* on vektori

$$\bar{v} + \bar{w} = (v_1 + w_1, v_2 + w_2).$$

Lisäksi vektoreita voidaan kertoa reaaliluvuilla. Tätä operaatiota kutsutaan *skalaarikertolaskuksi*. Skalaarikertolaskussa vektorin molemmat komponentit kerrotaan samalla luvulla.

**Määritelmä 1.4.** Jos  $\bar{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$  ja  $c \in \mathbb{R}$ , määritellään

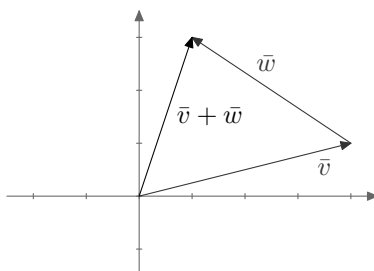
$$c\bar{v} = (cv_1, cv_2).$$

Vektorien yhteydessä reaalilukuja kutsutaan usein *skalaareiksi*, ja siitä johtuu myös skalaarikertolaskun nimitys.

**Esimerkki 1.5.** Tarkastellaan vektoreita  $\bar{v} = (4, 1)$  ja  $\bar{w} = (-3, 2)$ . Niiden summa on

$$\bar{v} + \bar{w} = (4 + (-3), 1 + 2) = (1, 3).$$

Yhteenlaskua voidaan havainnollistaa geometrisesti (ks. kuva 1.3). Vektorien summa nähdään asettamalla vektoreita vastaavat suuntajanaat peräkkäin niin, että jälkimmäinen vektori alkaa siitä, mihin ensimmäinen päättyi. Summavektorin alkupiste on ensimmäisen vektorin alkupiste ja päätepiste jälkimmäisen vektorin päätepiste.



Kuva 1.3: Vektorit  $\bar{v}$  ja  $\bar{w}$  sekä niiden summa  $\bar{v} + \bar{w}$ .

Tutkitaan sitten skalaarikertolaskua. Määritelmän mukaan

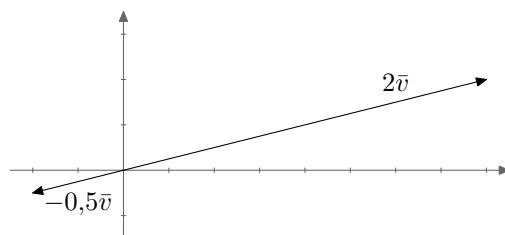
$$2\bar{v} = (2 \cdot 4, 2 \cdot 1) = (8, 2)$$

ja

$$-\frac{1}{2}\bar{v} = \left(-\frac{1}{2} \cdot 4, -\frac{1}{2} \cdot 1\right) = \left(-2, -\frac{1}{2}\right).$$

Vektorit  $2\bar{v}$  ja  $-\frac{1}{2}\bar{v}$  on piirretty kuvaan 1.4. Huomataan, että skalaarilla kertominen venyttää (eli skaalaa) vektoria vastaavan suuntajanan pituutta, mutta säilyttää suuntajanan suunnan, kuitenkin niin, että negatiivisella skalaarilla kertominen kääntää suunnan vastakkaiseksi.

**Määritelmä 1.6.** Vektorille  $(-1)\bar{v}$  käytetään merkintää  $-\bar{v}$ . Summalle  $\bar{v} + (-\bar{w})$  puolestaan käytetään merkintää  $\bar{v} - \bar{w}$ . Tätä kutsutaan vektorien  $\bar{v}$  ja  $\bar{w}$  *erotukseksi*.



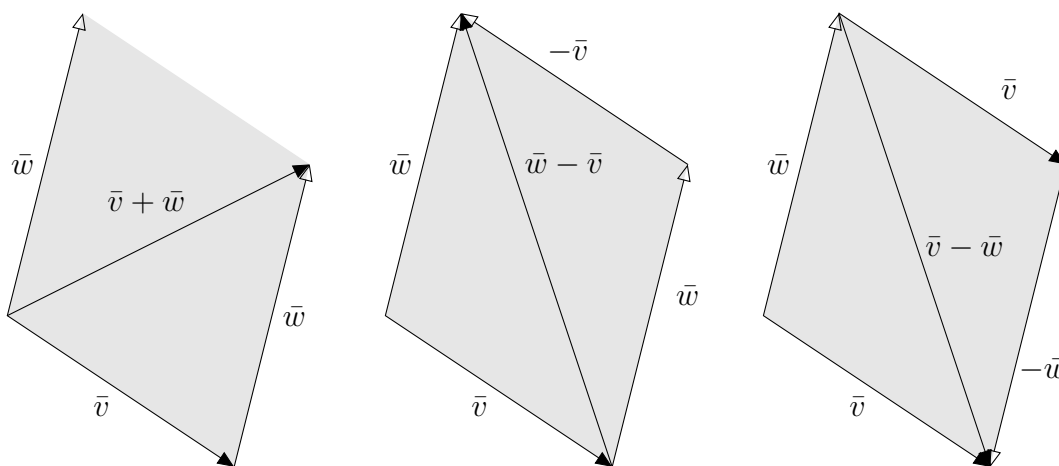
Kuva 1.4: Skalaarimonikerrat  $2\bar{v}$  ja  $-\frac{1}{2}\bar{v}$ .

Esimerkiksi vektorien  $(-1, 6)$  ja  $(4, 2)$  erotus on

$$(-1, 6) - (4, 2) = (-1, 6) + (-1)(4, 2) = (-1, 6) + (-4, -2) = (-5, 4).$$

Vektorien erotuksen voi määrittää kuvasta samaan tapaan kuin summan. Määritelmän mukaan vektorien  $\bar{v}$  ja  $\bar{w}$  erotus  $\bar{v} - \bar{w}$  saadaan laskemalla yhteen vektori  $\bar{v}$  ja vastavektori  $-\bar{w}$ . Piirroksessa tämä tarkoittaa sitä, että jälkimmäisen vektorin suunta on käännettävä ennen yhteenlaskua.

Se, että suuntajanan voi siirtää alkamaan mistä pisteestä tahansa, aiheuttaa toisinaan hämmennystä. Kuvassa 1.5 on eräs tapa esittää kaksi vektoria sekä niiden summa ja erotukset molemmiin päin. Kannattaa selvittää itselleen harjoituksen vuoksi, miksi vektorien suunnat ovat kuvassa niin kuin ovat.



Kuva 1.5: Vektorien  $\bar{v}$  ja  $\bar{w}$  summa sekä erotukset  $\bar{w} - \bar{v}$  ja  $\bar{v} - \bar{w}$ .

### 1.3 Kolmiulotteinen avaruus

Kaikki edellä esitellyt käsitteet voidaan määrittellä myös kolmiulotteisessa avaruudessa. Avaruus  $\mathbb{R}^3$  on joukko

$$\{(a, b, c) \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}.$$

Myös avaruuden  $\mathbb{R}^3$  alkioita nimitetään vektoreiksi, ja avaruutta  $\mathbb{R}^3$  kutsutaan kolmiulotteiseksi vektoriavaruudeksi. Avaruuden  $\mathbb{R}^3$  vektoreita voidaan ajatella avaruuskoordinaatiston pisteinä, paikkavektoreina tai suuntajanoina. Yhteenlasku ja skalaarikertolasku määritellään komponenteittain samalla tavalla kuin avaruudessa  $\mathbb{R}^2$ .

Kolmiulotteisen avaruuden koordinaattiakselien suuntaiset yksikkövektorit ovat  $\bar{i} = (1, 0, 0)$ ,  $\bar{j} = (0, 1, 0)$  ja  $\bar{k} = (0, 0, 1)$ . Näitä merkintöjä ei jatkossa tulla tarvitsemaan.



## 2 Avaruus $\mathbb{R}^n$

Edellisessä luvussa käsiteltiin avaruuksien  $\mathbb{R}^2$  ja  $\mathbb{R}^3$  vektoreita eli reaalilukupareja ja reaalilukukolmikoita. Näitä avaruuksia voidaan yleistää määrittelemällä  $n$ -ulotteinen avaruus  $\mathbb{R}^n$ .

**Määritelmä 2.1.** Oletetaan, että  $n \in \{1, 2, 3, \dots\}$ . Avaruuden  $\mathbb{R}^n$  alkioit ovat reaaliluvuista koostuvia  $n$ -jonoja. Toisin sanoen

$$\mathbb{R}^n = \{(v_1, v_2, \dots, v_n) \mid v_1, v_2, \dots, v_n \in \mathbb{R}\}.$$

Avaruuden  $\mathbb{R}^n$  alkioita kutsutaan *vektoreiksi*.

Jos  $\bar{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ , niin lukuja  $v_1, v_2, \dots, v_n$  kutsutaan vektorin  $\bar{v}$  *komponenteiksi*. Sovimme, että ellei toisin mainita, vektorin  $\bar{v}$  komponentteja merkitään symboleilla  $v_1, v_2, \dots, v_n$ .

Yleisille  $n$ -ulotteisen avaruuden vektoreille määritellään laskutoimitukset samoin kuin kaksi- ja kolmiulotteisessa tapauksessa.

**Määritelmä 2.2.** Oletetaan, että  $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\bar{w} \in \mathbb{R}^n$  ja  $c \in \mathbb{R}$ . Tällöin

$$\begin{aligned}\bar{v} + \bar{w} &= (v_1 + w_1, v_2 + w_2, \dots, v_n + w_n) \quad \text{ja} \\ c\bar{v} &= (cv_1, cv_2, \dots, cv_n).\end{aligned}$$

Ensimmäistä laskutoimitusta nimitetään vektorien *yhteenlaskuksi* ja toista *skalaarikertolaskuksi*.

Vektorien yhteydessä reaalilukuja kutsutaan *skalaareiksi*. Jos  $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$  ja  $c \in \mathbb{R}$ , vektoria  $c\bar{v}$  nimitetään vektorin  $\bar{v}$  *skalaarimonikerraksi*.

*Huom.* Ainoastaan samanulotteisen avaruuden vektoreita voi laskea yhteen.

**Määritelmä 2.3.** Vektorin  $\bar{v}$  *vastavektori* on skalaarimonikerta  $(-1)\bar{v}$ . Sitä merkitään  $-\bar{v}$ . Vektoreiden  $\bar{v}$  ja  $\bar{w}$  *erotus* on summa  $\bar{v} + (-\bar{w})$ . Sitä merkitään  $\bar{v} - \bar{w}$ . Vektoria  $(0, 0, \dots, 0)$  kutsutaan *nollavektoriksi*. Sille käytetään merkintää  $\bar{0}$ .

**Esimerkki 2.4.** Merkitään  $\bar{v} = (-5, 3, 0, 1, -1)$  ja  $\bar{w} = (-2, -4, 2, 3, 5)$ . Tällöin  $\bar{v}$  ja  $\bar{w}$  ovat avaruuden  $\mathbb{R}^5$  vektoreita. Lasketaan vektorit  $2\bar{v} - 3\bar{w}$  ja  $-5\bar{v} - \bar{w}$ :

$$\begin{aligned}2\bar{v} - 3\bar{w} &= (-10, 6, 0, 2, -2) - (-6, -12, 6, 9, 15) = (-4, 18, -6, -7, -17) \\ -5\bar{v} - \bar{w} &= (25, -15, 0, -5, 5) - (-2, -4, 2, 3, 5) = (27, -11, -2, -8, 0).\end{aligned}$$

Voidaan osoittaa, että avaruuden  $\mathbb{R}^n$  vektoreille pätevät koulusta tutut laskusäännöt.

**Lause 2.5.** Oletetaan, että  $\bar{v}, \bar{w}, \bar{u} \in \mathbb{R}^n$  ja  $a, b \in \mathbb{R}$ . Tällöin pätee:

1.  $\bar{v} + \bar{w} = \bar{w} + \bar{v}$  (vaihdannaisuus)
2.  $(\bar{u} + \bar{v}) + \bar{w} = \bar{u} + (\bar{v} + \bar{w})$  (liitännäisyys)
3.  $\bar{v} + \bar{0} = \bar{v}$
4.  $\bar{v} + (-\bar{v}) = \bar{0}$
5.  $a(\bar{v} + \bar{w}) = a\bar{v} + a\bar{w}$  (osittelulaki)
6.  $(a + b)\bar{v} = a\bar{v} + b\bar{v}$  (osittelulaki)
7.  $a(b\bar{v}) = (ab)\bar{v}$
8.  $1\bar{v} = \bar{v}$ .

*Huom.* Lause tarkoittaa väitettä, joka voidaan perustella todeksi nojautumalla määritelmiin ja aikaisemmin todeksi osoitettuihin väitteisiin.

*Todistus.* Todistetaan esimerkin vuoksi kohta 1 ja jätetään loput kohdat harjoitustehtäviksi. Oletetaan kuten lauseessa, että  $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$  ja  $\bar{w} \in \mathbb{R}^n$ . Tällöin  $\bar{v} = (v_1, \dots, v_n)$  ja  $\bar{w} = (w_1, \dots, w_n)$ , ja luvut  $v_1, \dots, v_n$  ja  $w_1, \dots, w_n$  ovat reaalityyppisiä. Koska reaalityyppisten yhteenlasku on vaihdannainen, jokaisella  $i \in \{1, \dots, n\}$  pätee  $v_i + w_i = w_i + v_i$ . Nyt nähdään, että

$$\begin{aligned} \bar{v} + \bar{w} &= (v_1 + w_1, v_2 + w_2, \dots, v_n + w_n) \\ &= (w_1 + v_1, w_2 + v_2, \dots, w_n + v_n) = \bar{w} + \bar{v}. \end{aligned}$$

Väite on todistettu. □

Tasovektorien yhteydessä todettiin, että skalaarikertolasku säilyttää (tai kääntää) vektorin suunnan. Otetaan tämä havainto yleisten vektorien yhdensuuntaisuuden määritelmäksi.

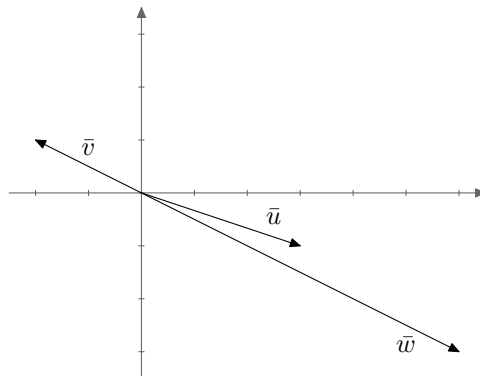
**Määritelmä 2.6.** Avaruuden  $\mathbb{R}^n$  vektorit  $\bar{v}$  ja  $\bar{w}$  ovat yhdensuuntaiset, jos  $\bar{v} = r\bar{w}$  jollakin  $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Tällöin merkitään  $\bar{v} \parallel \bar{w}$ .

**Esimerkki 2.7.** Vektorit  $\bar{v} = (-2, 1)$  ja  $\bar{w} = (6, -3)$  ovat yhdensuuntaiset, sillä  $\bar{v} = -\frac{1}{3}\bar{w}$ . Vektorit  $\bar{v}$  ja  $\bar{u} = (3, -1)$  eivät puolestaan ole yhdensuuntaiset, mikä voidaan päätellä seuraavasti. Jos olisi olemassa  $r \in \mathbb{R}$ , jolle päisi  $\bar{v} = r\bar{u}$ , niin täytyisi olla

$$\underbrace{(-2, 1)}_{\bar{v}} = r \underbrace{(3, -1)}_{\bar{u}} = (3r, -r).$$

Siispä  $-2 = 3r$  ja  $1 = -r$ . Ensimmäisen yhtälön mukaan  $r = -2/3$ , mutta toisen yhtälön mukaan  $r = -1$ . Tämä on mahdotonta, joten ei ole olemassa sellaista lukua  $r$ , jolle pätee  $\bar{v} = r\bar{u}$ . Siten vektorit  $\bar{v}$  ja  $\bar{u}$  eivät ole yhdensuuntaiset.

Vektorit  $\bar{v}$ ,  $\bar{w}$  ja  $\bar{u}$  on esitetty kuvassa 2.6.



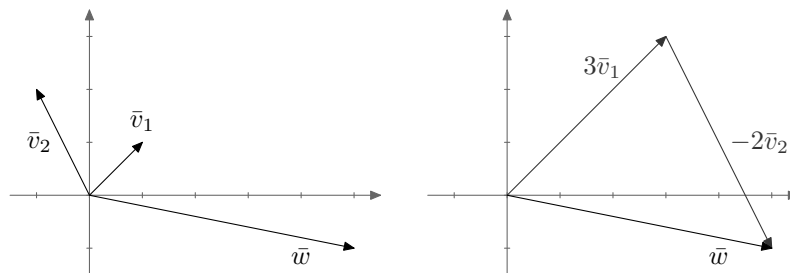
Kuva 2.6: Esimerkin 2.7 vektorit  $\bar{v}$ ,  $\bar{w}$  ja  $\bar{u}$ .

**Määritelmä 2.8.** Vektori  $\bar{w} \in \mathbb{R}^n$  on vektoreiden  $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_k \in \mathbb{R}^n$  *linearikombinaatio* eli *lineariyhdistelmä*, jos on olemassa sellaiset reaaliluvut  $a_1, a_2, \dots, a_k$ , että

$$\bar{w} = a_1\bar{v}_1 + a_2\bar{v}_2 + \dots + a_k\bar{v}_k.$$

**Esimerkki 2.9.** Merkitään  $\bar{v}_1 = (1, 1)$ ,  $\bar{v}_2 = (-1, 2)$  ja  $\bar{w} = (5, -1)$ . Vektori  $\bar{w}$  on vektoreiden  $\bar{v}_1$  ja  $\bar{v}_2$  linearikombinaatio, sillä

$$3\bar{v}_1 - 2\bar{v}_2 = 3(1, 1) - 2(-1, 2) = (3, 3) - (-2, 4) = (5, -1) = \bar{w}.$$



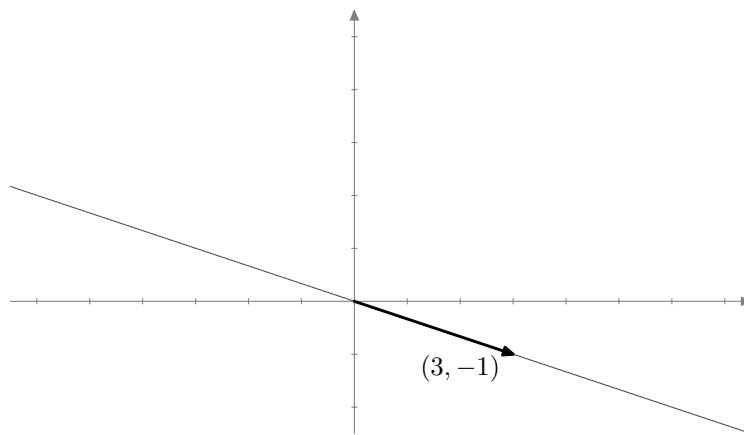
Kuva 2.7: Vektori  $\bar{w}$  on vektoreiden  $\bar{v}_1$  ja  $\bar{v}_2$  linearikombinaatio.

Edellisessä esimerkissä arvattiin, mitkä kertoimien  $a_1$  ja  $a_2$  pitää olla, jotta pätsi  $\bar{w} = a_1\bar{v}_1 + a_2\bar{v}_2$ . Myöhemmin esitellään yleinen keino kertoimien selvittämiseksi.

## 3 Suorat ja tasot

### 3.1 Suora

Kun vektoria  $(3, -1)$  kerrotaan reaalityyppisillä luvuilla, on tuloksena vektoreita, jotka ovat yhdensuuntaisia vektorin  $(3, -1)$  kanssa. Tällaisia vektoreita ovat esimerkiksi  $(6, -2)$  ja  $(-9, 3)$ . Näitä vektoreita vastaavat koordinaatiston pisteet sijaitsevat samalla suoralla. Voidaan siis sanoa, että joukko  $\{t(3, -1) \mid t \in \mathbb{R}\}$  muodostaa koordinaatiston suoran. Kullakin kertoimen  $t$  valinnalla saadaan jokin suoran pisteistä. Jos valitaan  $t = 1$ , saadaan alkuperäinen piste  $(3, -1)$ . Jos valitaan vaikkapa  $t = 2$ , saadaan piste  $(6, -2)$ .



Kuva 3.8: Suora  $\{t(3, -1) \mid t \in \mathbb{R}\}$ .

Kun edellä mainitussa esityksessä  $t(3, -1)$  valitaan  $t = 0$ , saadaan vektori  $(0, 0)$ . Suora kulkee siis origon kautta. Jos halutaan muodostaa suora, joka ei kulje origon kautta, on suora ensin ”siirrettävä” haluttuun paikkaan. Esimerkiksi suora  $\{(1, 2) + t(3, -1) \mid t \in \mathbb{R}\}$  ei kulje origon kautta. Tämän suoran pisteet saadaan lisäämällä vektoriin  $(1, 2)$  vektoreita, jotka ovat yhdensuuntaisia vektorin  $(3, -1)$  kanssa. Tilannetta on havainnollistettu kuvassa 3.9.

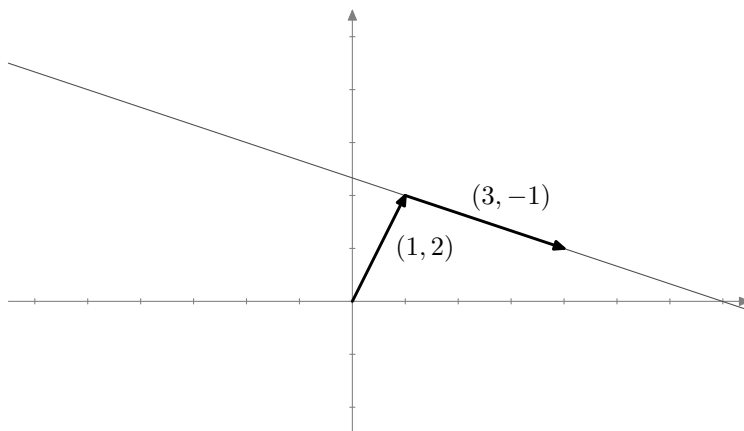
**Määritelmä 3.1.** Avaruuden  $\mathbb{R}^n$  suora on joukko

$$\{\bar{p} + t\bar{v} \mid t \in \mathbb{R}\},$$

missä  $\bar{p} \in \mathbb{R}^n$  ja  $\bar{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\bar{0}\}$ . Vektoria  $\bar{p}$  kutsutaan suoran *paikkavektoriksi* ja vektoria  $\bar{v}$  suoran *suuntavektoriksi*.

Olkoon  $S$  avaruuden  $\mathbb{R}^2$  suora. Jos  $(a, b) \in S$ , niin sanotaan, että piste  $(a, b)$  on suoralla  $S$  tai että suora  $S$  kulkee pisteen  $(a, b)$  kautta. Vastaavia ilmauksia käytetään avaruudessa  $\mathbb{R}^n$ .

*Huom.* Yllä ei ole annettu mitään tahansa suoran kuvailua, vaan suoran *määritelmä*. Emme siis ole lähteneet esimerkiksi jostakin suoran geometrisestä muotoilusta ja ilmaisseet saman asian vektoreilla, vaan määritelleet suoran käsitteen tämän kurssin tarpeita varten uudelleen.



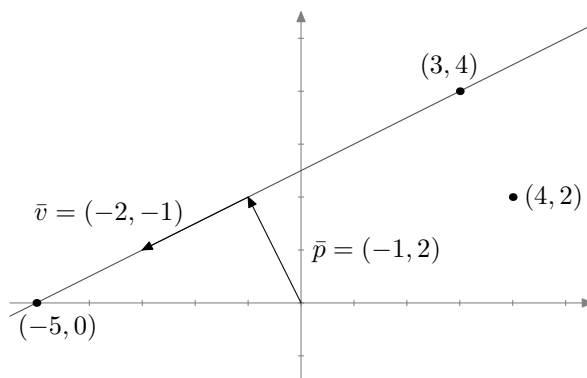
Kuva 3.9: Suora  $\{(1, 2) + t(3, -1) \mid t \in \mathbb{R}\}$ .

**Esimerkki 3.2.** Esimerkiksi joukko

$$S = \{(-1, 2) + t(-2, -1) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

on suora. Se on piirretty kuvaan 3.10. Määritelmän mukaan mikä tahansa suoran  $S$  piste voidaan kirjoittaa summana vektorista  $\bar{p} = (-1, 2)$  ja jostakin vektorin  $\bar{v} = (-2, -1)$  skalaarimonikerrasta. Esimerkiksi  $(-5, 0) = \bar{p} + 2\bar{v}$  ja  $(3, 4) = \bar{p} - 2\bar{v}$ , joten  $(-5, 0) \in S$  ja  $(3, 4) \in S$ . Siis suora  $S$  kulkee pisteiden  $(-5, 0)$  ja  $(3, 4)$  kautta.

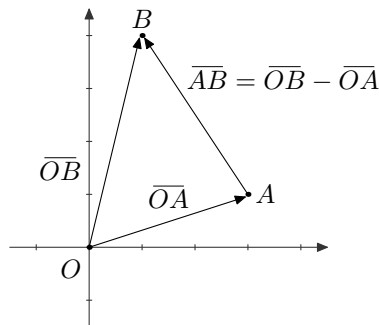
Toisaalta piste  $(4, 2)$  ei ole suoralla  $S$ . Jos nimittäin  $(4, 2) = (-1, 2) + t(-2, -1)$  jollakin  $t \in \mathbb{R}$ , niin  $4 = -1 - 2t$  ja  $2 = 2 - t$ . Ensimmäisen yhtälön perusteella  $t = -5/2$  ja toisen perusteella  $t = 0$ . Tämä on mahdotonta, joten ei ole olemassa sellaista lukua  $t \in \mathbb{R}$ , jolle pätee  $(4, 2) = (-1, 2) + t(-2, -1)$ . Siispä  $(4, 2) \notin S$ .



Kuva 3.10: Suora  $S = \{(-1, 2) + t(-2, -1) \mid t \in \mathbb{R}\}$  avaruudessa  $\mathbb{R}^2$ . Suoran paikkavektori on  $(-1, 2)$  ja suuntavektori  $(-2, -1)$ .

Ryhdytään seuraavaksi määrittämään suoraa, joka kulkee annettujen pisteiden kautta. Sitä ennen otetaan käyttöön muutama merkintä. Oletetaan, että  $A$  ja  $B$  ovat avaruuden  $\mathbb{R}^n$

pisteitä. Vektori  $\overline{AB}$  on vektori, jota vastaavan suuntajanan alkupiste on  $A$  ja päätepiste on  $B$  (ks. kuva 3.11). Origoa on tapana merkitä kirjaimella  $O$ . Siten pisteen  $A$  paikkavektorille saadaan merkintä  $\overline{OA}$ .

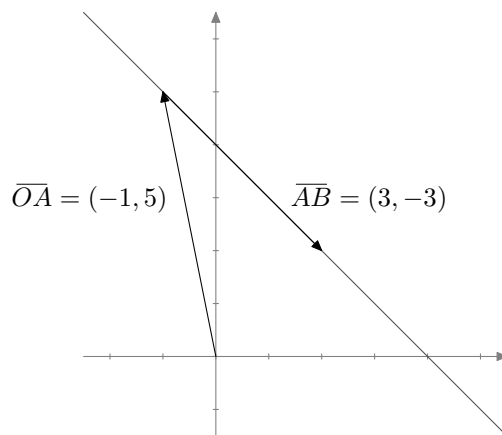


Kuva 3.11: Vektorit  $\overline{OA}$ ,  $\overline{OB}$  ja  $\overline{AB}$ .

**Esimerkki 3.3.** Tutkitaan, millainen on pisteiden  $A = (-1, 5)$  ja  $B = (2, 2)$  kautta kulkeva suora. Tätä varten tarvitaan suoralle paikkavektori. Paikkavektoriksi käy minkä tahansa suoran pisteen paikkavektori, esimerkiksi vektori  $\overline{OA} = (-1, 5)$ . Suuntavektoriksi käy mikä tahansa suoran suuntainen vektori, esimerkiksi vektori

$$\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA} = (2, 2) - (-1, 5) = (3, -3).$$

Näin saadaan suora  $\{(-1, 5) + t(3, -3) \mid t \in \mathbb{R}\}$ .



Kuva 3.12: Suora  $\{(-1, 5) + t(3, -3) \mid t \in \mathbb{R}\}$ .

Varmistutaan vielä siitä, että annetut pisteet  $A$  ja  $B$  todellakin ovat suoralla. Huomataan, että  $(-1, 5) = (-1, 5) + 0 \cdot (3, -3)$  ja  $(2, 2) = (-1, 5) + (3, -3)$ . Siten pisteet  $A$  ja  $B$  ovat suoralla.

Vastaavalla menetelmällä on aina mahdollista määrittää kahden pisteen kautta kulkeva suora, vaikka asiaa ei sen tarkemmin tässä osoiteta.

Suoran paikka- ja suuntavektorit eivät ole yksikäsitteisiä, sillä sama suora voidaan kirjoittaa joukkona  $\{\bar{p} + t\bar{v} \mid t \in \mathbb{R}\}$  usealla eri tavalla. Itse asiassa on mahdollista osoittaa, että

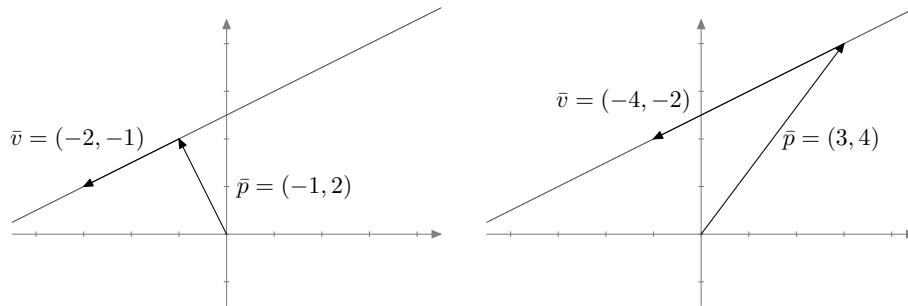
- vektoriksi  $\bar{p}$  voidaan valita suoran minkä tahansa pisteen paikkavektori
- vektoriksi  $\bar{v}$  voidaan valita mikä tahansa suoran suuntainen vektori.

Tutkitaan ilmiötä esimerkin avulla, ennen kuin todistetaan väitteet.

**Esimerkki 3.4.** Esimerkin 3.2 suoralle  $S = \{(-1, 2) + t(-2, -1) \mid t \in \mathbb{R}\}$  on mahdollista valita paikkavektoriksi piste  $(3, 4)$  ja suuntavektoriksi vektori  $(-4, -2)$ . Tällöin  $S$  voidaan kirjoittaa muodossa

$$\{(3, 4) + s(-4, -2) \mid s \in \mathbb{R}\}.$$

Vaikka tämä joukko onkin äkkiseltään katsottuna erilainen kuin suoran  $S$  alkuperäinen määritelmä, on joukoissa täsmälleen samat alkio. Asiaa on havainnollistettu kuvassa 3.13.



Kuva 3.13: Suoran paikkavektori ja suuntavektori eivät ole yksikäsitteisiä.

Kuvasta katsominen ei vielä todista suoria samoiksi. Osoitetaan huolellisesti, että joukot  $S = \{(-1, 2) + t(-2, -1) \mid t \in \mathbb{R}\}$  ja  $S' = \{(3, 4) + s(-4, -2) \mid s \in \mathbb{R}\}$  ovat samat. Kaksi joukkoa osoitetaan samoiksi näyttämällä, että kumpikin on toisen osajoukko.

” $\subset$ ”: Osoitetaan ensin, että  $S \subset S'$ . Tämä tehdään näyttämällä, että jokainen joukon  $S$  alkio on joukossa  $S'$ . Oletetaan, että  $\bar{a} \in S$ . Tällöin joukon  $S$  määritelmän perusteella pätee  $\bar{a} = (-1, 2) + t(-2, -1)$  jollakin  $t \in \mathbb{R}$ . On osoitettava, että  $\bar{a} \in S'$ . Tavoitteena on siis kirjoittaa vektori  $\bar{a} = (-1, 2) + t(-2, -1)$  muodossa  $(3, 4) + s(-4, -2)$ , missä  $s$  on jokin reaaliluku. Ryhdytään muokkaamaan vektoria  $\bar{a}$  haluttuun muotoon. Huomataan, että

$$\begin{aligned} \bar{a} &= (-1, 2) + t(-2, -1) = (3, 4) + (-4, -2) + t(-2, -1) \\ &= (3, 4) + 2(-2, -1) + t(-2, -1) = (3, 4) + (2 + t)(-2, -1) \\ &= (3, 4) + \frac{2 + t}{2}(-4, -2). \end{aligned}$$

Koska  $(2 + t)/2 \in \mathbb{R}$ , viimeisestä muodosta nähdään, että  $\bar{a} \in S'$ . (Joukon  $S'$  määritelmässä voidaan valita  $s = (2 + t)/2$ .) On siis osoitettu, että  $S \subset S'$ .

” $\supset$ ”: Osoitetaan sitten, että  $S' \subset S$ , eli näytetään, että jokainen joukon  $S'$  alkio on joukossa  $S$ . Oletetaan, että  $\bar{a} \in S'$ . Nyt  $\bar{a} = (3, 4) + s(-4, -2)$  jollakin  $s \in \mathbb{R}$ . On osoitettava, että

$\bar{a} \in S$ . Tavoitteena on siis kirjoittaa vektori  $\bar{a}$  muodossa  $(-1, 2) + t(-2, -1)$ , missä  $t$  on jokin reaaliluku. Huomataan, että

$$\begin{aligned}\bar{a} &= (3, 4) + s(-4, -2) = (-1, 2) + (4, 2) + s(-4, -2) \\ &= (-1, 2) + (-1)(-4, -2) + s(-4, -2) = (-1, 2) + (-1 + s)(-4, -2) \\ &= (-1, 2) + 2(-1 + s)(-2, -1) = (-1, 2) + (-2 + 2s)(-2, -1).\end{aligned}$$

Koska  $-2 + 2s \in \mathbb{R}$ , tiedetään, että  $\bar{a} \in S$ . Näin on osoitettu, että  $S' \subset S$ .

Osoitetaan sitten yleisessä tapauksessa, että paikkavektoriksi voidaan valita suoran minkä tahansa pisteen paikkavektori ja suuntavektoriksi mikä tahansa suoran suuntainen vektori. Todistus mukailee edellistä esimerkkiä.

**Lause 3.5.** *Olkoon  $S = \{\bar{p} + t\bar{v} \mid t \in \mathbb{R}\}$  avaruuden  $\mathbb{R}^n$  suora. Oletetaan, että  $\bar{q} \in S$  ja  $\bar{w}$  on yhdensuuntainen vektorin  $\bar{v}$  kanssa. Tällöin  $S = \{\bar{q} + t\bar{w} \mid t \in \mathbb{R}\}$*

*Todistus.* Merkitään  $S' = \{\bar{q} + t\bar{w} \mid t \in \mathbb{R}\}$  ja osoitetaan, että  $S = S'$ . Koska vektorit  $\bar{v}$  ja  $\bar{w}$  ovat yhdensuuntaisia, on olemassa  $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , jolle pätee  $\bar{v} = k\bar{w}$ . Tästä seuraa, että  $\bar{w} = (1/k)\bar{v}$ . Toisaalta  $\bar{q} \in S$ , joten  $\bar{q} = \bar{p} + b\bar{v}$  jollakin  $b \in \mathbb{R}$ . Tästä seuraa, että  $\bar{p} = \bar{q} - b\bar{v} = \bar{q} - bk\bar{w}$

” $\subset$ ”: Oletetaan, että  $\bar{a} \in S$ . Joukon  $S$  määritelmän perusteella  $\bar{a} = \bar{p} + t\bar{v}$  jollakin  $t \in \mathbb{R}$ . Huomataan, että

$$\begin{aligned}\bar{a} &= \bar{p} + t\bar{v} = \bar{q} - bk\bar{w} + t(k\bar{w}) \\ &= \bar{q} - bk\bar{w} + tk\bar{w} = \bar{q} + (-bk + tk)\bar{w} \in S'\end{aligned}$$

On siis osoitettu, jokainen joukon  $S$  alkio on joukossa  $S'$ . Toisin sanoen  $S \subset S'$ .

” $\supset$ ”: Oletetaan, että  $\bar{a} \in S'$ . Nyt  $\bar{a} = \bar{q} + t\bar{w}$  jollakin  $t \in \mathbb{R}$ . Huomataan, että

$$\begin{aligned}\bar{a} &= \bar{q} + t\bar{w} = \bar{p} + b\bar{v} + t((1/k)\bar{v}) \\ &= \bar{p} + b\bar{v} + (t/k)\bar{v} = \bar{p} + (b + t/k)\bar{v} \in S.\end{aligned}$$

Näin on osoitettu, että  $S' \subset S$ .

Siten  $S = S'$ . □

## 3.2 Taso

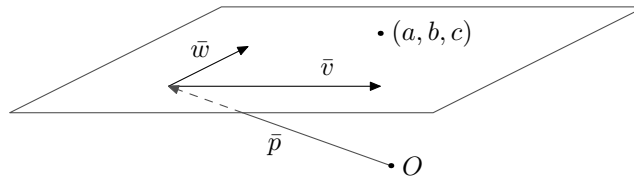
Kolmiulotteisessa avaruudessa voidaan määritellä tasot samaan tapaan kuin suorat. Nyt tarvitaan kuitenkin kahta suuntavektoria, ja näiden täytyy olla erisuuntaiset.

**Määritelmä 3.6.** Avaruuden  $\mathbb{R}^n$  taso on joukko

$$\{\bar{p} + s\bar{v} + t\bar{w} \mid s, t \in \mathbb{R}\},$$

missä  $\bar{p} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\bar{v}, \bar{w} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\bar{0}\}$  ja vektorit  $\bar{v}$  ja  $\bar{w}$  eivät ole yhdensuuntaiset. Vektoria  $\bar{p}$  kutsutaan tason paikkavektoriksi ja vektoreita  $\bar{v}$  ja  $\bar{w}$  tason suuntavektoreiksi.





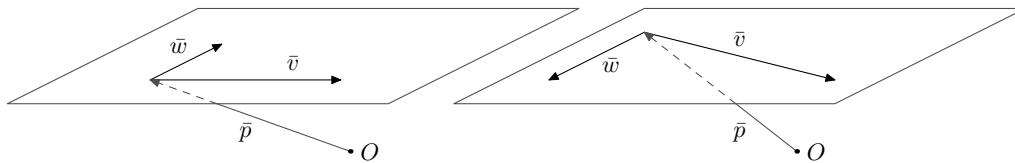
Kuva 3.14: Piste  $(a, b, c)$  on tasossa  $T$ .

Olkoon  $T$  avaruuden  $\mathbb{R}^3$  taso. Jos  $(a, b, c) \in T$ , niin sanotaan, että piste  $(a, b, c)$  on tasossa  $T$  tai että taso  $T$  kulkee pisteen  $(a, b, c)$  kautta. Tasoa ja siinä olevaa pistettä on havainnollistettu kuvassa 3.14. Vastaavia ilmauksia käytetään avaruudessa  $\mathbb{R}^n$ .

Kuten suorien kohdalla voidaan tasojenkin tapauksessa osoittaa, että sama taso on mahdollista kirjoittaa usealla eri tavalla joukkona  $\{\bar{p} + s\bar{w} + t\bar{v} \mid s, t \in \mathbb{R}\}$ . Tarkemmin sanoen

- vektoriksi  $\bar{p}$  voidaan valita tason minkä tahansa pisteen paikkavektori
- vektoreiksi  $\bar{w}$  ja  $\bar{v}$  voidaan valita mitkä tahansa tason suuntaisen vektorit, kunhan  $\bar{w}$  ja  $\bar{v}$  eivät ole yhdensuuntaiset.

Tilannetta on havainnollistettu kuvassa 3.15. Todistus on samanlainen kuin suorien tapauksessa, mutta sitä ei esitetä tässä.



Kuva 3.15: Taso voidaan kirjoittaa eri tavoin joukkona  $\{\bar{p} + s\bar{w} + t\bar{v} \mid s, t \in \mathbb{R}\}$ .

**Esimerkki 3.7.** Määritetään pisteiden  $A = (0, 1, 0)$ ,  $B = (-1, 3, 2)$  ja  $C = (-2, 0, 1)$  kautta kulkeva taso  $T$ . Valitaan ensin tason paikkavektori. Esimerkiksi tason pisteen  $A$  paikkavektori  $\overline{OA} = (0, 1, 0)$  käy tähän tarkoitukseen. Lisäksi tarvitaan tason suuntaiset suuntavektorit:

$$\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA} = (-1, 2, 2) \quad \text{ja} \quad \overline{AC} = \overline{OC} - \overline{OA} = (-2, -1, 1).$$

Huomaa, että vektorit eivät ole yhdensuuntaiset, sillä  $\overline{AB} \neq r\overline{AC}$  kaikilla nollasta poikkeavilla reaaliluvuilla  $r$ . (Tämä pitäisi tietysti todistaa täsmällisesti, mutta sivuutamme sen.) Näin saadaan taso

$$\begin{aligned} T &= \{\overline{OA} + s\overline{AB} + t\overline{AC} \mid s, t \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(0, 1, 0) + s(-1, 2, 2) + t(-2, -1, 1) \mid s, t \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

## 4 Avaruuden $\mathbb{R}^n$ aliavaruudet

Edellisessä luvussa käsitteimme suoria ja tasoja. Osoittautuu, että erityisesti origon kautta kulkevat suorat ja tasot ovat lineaarialgebran kannalta mielenkiintoisia. Ne ovat niin kutsuttuja aliavaruuksia.

Esimerkiksi avaruuden  $\mathbb{R}^2$  suora  $S = \{\bar{0} + a(-3, 1) \mid a \in \mathbb{R}\}$  kulkee origon kautta. Sen voi kirjoittaa muodossa

$$S = \{a(-3, 1) \mid a \in \mathbb{R}\}.$$

Suora  $S$  koostuu siis vektorin  $(-3, 1)$  monikerroista. Sanotaan, että suora  $S$  on vektorin  $(-3, 1)$  virittämä.

Avaruuden  $\mathbb{R}^3$  origon kautta kulkeva taso  $T = \{\bar{0} + a_1(-3, 1, 2) + a_2(2, 2, 0) \mid a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$  voidaan kirjoittaa muodossa

$$T = \{a_1(-3, 1, 2) + a_2(2, 2, 0) \mid a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}.$$

Taso  $T$  koostuu siis vektorien  $\bar{v}_1 = (-3, 1, 2)$  ja  $\bar{v}_2 = (2, 2, 0)$  kaikista mahdollisista lineaarikombinaatioista. Sanotaan, että taso  $T$  on vektorien  $(-3, 1, 2)$  ja  $(2, 2, 0)$  virittämä.

**Määritelmä 4.1.** Vektoreiden  $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k \in \mathbb{R}^n$  virittämä *aliavaruus* on joukko

$$\text{span}(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k) = \{a_1\bar{v}_1 + a_2\bar{v}_2 + \dots + a_k\bar{v}_k \mid a_1, a_2, \dots, a_k \in \mathbb{R}\}.$$

Sanotaan, että vektorit  $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k \in \mathbb{R}^n$  *virittävät* avaruuden  $\text{span}(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k)$ .

Vektoreiden virittämä aliavaruus koostuu siis kaikista kyseisten vektoreiden lineaarikombinaatioista. Englannin kielen verbi ”span” tarkoittaa virittämistä tai ulottamista.

Edellä käsitelty suora  $S$  voidaan nyt kirjoittaa käyttäen uutta merkintää:

$$\text{span}((-3, 1)) = \{a(-3, 1) \mid a \in \mathbb{R}\}.$$

Samaan tapaan voidaan kirjoittaa taso  $T$ :

$$\text{span}((-3, 1, 2), (2, 2, 0)) = \{a_1(-3, 1, 2) + a_2(2, 2, 0) \mid a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}.$$

**Esimerkki 4.2.** Tutkitaan, miltä näyttävät avaruuden  $\mathbb{R}^4$  aliavaruuden

$$\text{span}((1, 0, -2, 5), (0, -1, 4, 0), (0, 0, 0, 1))$$

alkiot. Määritelmän mukaan

$$\begin{aligned} & \text{span}((1, 0, -2, 5), (0, -1, 4, 0), (0, 0, 0, 1)) \\ &= \{a_1(1, 0, -2, 5) + a_2(0, -1, 4, 0) + a_3(0, 0, 0, 1) \mid a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(a_1, 0, -2a_1, 5a_1) + (0, -a_2, 4a_2, 0) + (0, 0, 0, a_3) \mid a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(a_1, -a_2, -2a_1 + 4a_2, 5a_1 + a_3) \mid a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Aliavaruuden  $\text{span}((1, 0, -2, 2), (0, -1, 4, 5), (0, 0, 0, 1))$  alkiot ovat siis muotoa

$$(a_1, -a_2, -2a_1 + 4a_2, 5a_1 + a_3),$$

missä  $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ .

**Esimerkki 4.3.** Tutkitaan hieman, millaisia aliavaruuksia voidaan virittää avaruuksissa  $\mathbb{R}^2$  ja  $\mathbb{R}^3$ . Nollavektorin virittämä aliavaruus on  $\text{span}(\vec{0}) = \{a \cdot \vec{0} \mid a \in \mathbb{R}\} = \{\vec{0}\}$ . Aliavaruudessa on siis ainoastaan nollavektori.

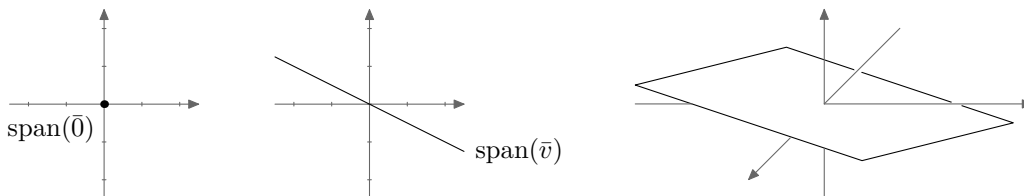
Oletetaan sitten, että  $\vec{v} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\vec{0}\}$  tai  $\vec{v} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$ . Tällöin vektorin  $\vec{v}$  virittämä aliavaruus  $\text{span}(\vec{v}) = \{a\vec{v} \mid a \in \mathbb{R}\}$  on vektorin  $\vec{v}$  suuntainen suora. Tämän suoran paikkavektori on nollavektori, joten suora kulkee origon kautta.

Jos taas  $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$  ja  $\vec{v}$  ja  $\vec{w}$  eivät ole yhdensuuntaisia, vektorien  $\vec{v}$  ja  $\vec{w}$  virittämä aliavaruus  $\text{span}(\vec{v}, \vec{w}) = \{s\vec{v} + t\vec{w} \mid s, t \in \mathbb{R}\}$  on taso, joka kulkee origon kautta.

Myös koko avaruus  $\mathbb{R}^3$  on eräiden vektoreiden virittämä aliavaruus:

$$\begin{aligned} \text{span}((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)) &= \{a_1(1, 0, 0) + a_2(0, 1, 0) + a_3(0, 0, 1) \mid a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(a_1, a_2, a_3) \mid a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^3. \end{aligned}$$

Tulemme näkemään, että avaruudelle  $\mathbb{R}^3$  löytyy monia muitakin virittäjävektoreita kuin  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$  ja  $(0, 0, 1)$ .



Kuva 4.16: Nollavektorin virittämä aliavaruus on  $\{\vec{0}\}$ . Vektorin  $\vec{v} \neq \vec{0}$  virittämä aliavaruus on origon kautta kulkeva suora. Kahden vektorin virittämä aliavaruus voi olla origon kautta kulkeva taso.

**Esimerkki 4.4.** Joukko  $\{(4a_1 - 2a_2, 3a_1 - a_2, 5a_1 + a_2) \mid a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$  on eräiden avaruuden  $\mathbb{R}^3$  vektorien virittämä aliavaruus. Etsitään tälle aliavaruudelle virittäjävektorit. Toimitaan muuten samoin kuin esimerkissä 4.2, mutta käännetään vain päättelyn suunta:

$$\begin{aligned} \{(4a_1 - 2a_2, 3a_1 - a_2, 5a_1 + a_2) \mid a_1, a_2 \in \mathbb{R}\} &= \{(4a_1, 3a_1, 5a_1) + (-2a_2, -a_2, a_2) \mid a_1, a_2 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{a_1(4, 3, 5) + a_2(-2, -1, 1) \mid a_1, a_2 \in \mathbb{R}\} \\ &= \text{span}((4, 3, 5), (-2, -1, 1)). \end{aligned}$$

Kyseessä on siis vektorien  $(4, 3, 5)$  ja  $(-2, -1, 1)$  virittämä aliavaruus. Se on origon kautta kulkeva taso.

Aliavaruus yleistää origon kautta kulkevan suoran ja tason käsitteitä. Seuraava esimerkki osoittaa, miksi juuri origon kautta kulkevat suorat ja tasot ovat erityisen kiinnostavia.

**Esimerkki 4.5.** Tarkastellaan origon kautta kulkevaa suoraa

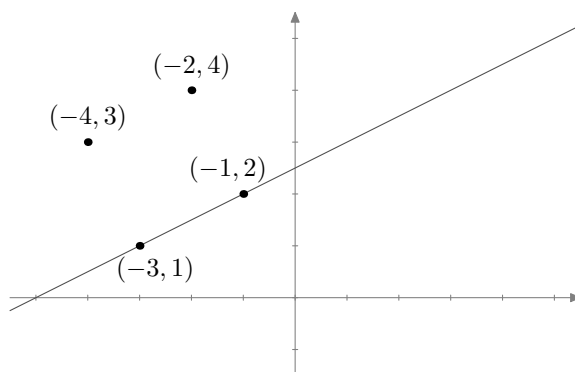
$$S = \text{span}(\bar{v}) = \{t\bar{v} \mid t \in \mathbb{R}\},$$

missä  $\bar{v} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\bar{0}\}$ . Jos  $\bar{w}, \bar{u} \in S$ , niin  $\bar{w} = a\bar{v}$  ja  $\bar{u} = b\bar{v}$  joillakin  $a, b \in \mathbb{R}$ . Nyt  $\bar{w} + \bar{u} = (a+b)\bar{v}$ , joten summa  $\bar{w} + \bar{u}$  on suoran  $S$  alkio. Lisäksi jos  $c \in \mathbb{R}$ , niin  $c\bar{w} = c(a\bar{v}) = (ca)\bar{v}$ . Siten kaikkien suoran  $S$  alkioden skalaarimonikerrat ovat edelleen suoran  $S$  alkioita. Tavallaan suora  $S$  on oma pieni avaruutensa avaruuden  $\mathbb{R}^2$  sisässä, ja siellä voidaan laskea vektoreita yhteen ja kertoa niitä reaaliluvuilla. Sama pätee origon kautta kulkeviin tasoihin.

Tilanne on aivan toinen, jos suora tai taso ei kulje origon kautta. Tutkitaan vaikkapa esimerkin 3.2 suoraa

$$S = \{(-1, 2) + t(-2, -1) \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

Nyt esimerkiksi  $(-1, 2)$  ja  $(-3, 1)$  ovat suoralla  $S$ . Summa  $(-1, 2) + (-3, 1) = (-4, 3)$  ei kuitenkaan ole suoralla  $S$  (ks. kuva 4.17). Myöskään skalaarimonikerta  $2 \cdot (-1, 2) = (-2, 4)$  ei ole suoralla  $S$ .



Kuva 4.17: Esimerkin 3.2 suora  $S$ , joka ei ole aliavaruus.

Edellä tehdyt havainnot voidaan yleistää minkä tahansa vektoreiden virittämälle aliavaruudelle. Jos aliavaruuden kaksi vektoria lasketaan yhteen, on summa edelleen aliavaruudessa. Samoin aliavaruuden vektoreiden skalaarimonikerrat ovat aliavaruudessa. Lisäksi nollavektori kuuluu aina aliavaruuteen.

**Lause 4.6.** Oletetaan, että  $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_k \in \mathbb{R}^n$ . Olkoon  $W = \text{span}(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k)$ . Tällöin seuraavat väitteet pätevät:

- Jos  $\bar{u}, \bar{w} \in W$ , niin  $\bar{u} + \bar{w} \in W$ .
- Jos  $\bar{w} \in W$  ja  $c \in \mathbb{R}$ , niin  $c\bar{w} \in W$ .
- $\bar{0} \in W$ .

*Todistus.* Osoitetaan kohta a) ja jätetään loput kohdat harjoitustehtäviksi. Oletetaan, että  $\bar{u}, \bar{w} \in W$ . Nyt  $\bar{u} = a_1\bar{v}_1 + \dots + a_k\bar{v}_k$  joillakin  $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}$  ja  $\bar{w} = b_1\bar{v}_1 + \dots + b_k\bar{v}_k$  joillakin  $b_1, \dots, b_k \in \mathbb{R}$ . Osoitetaan, että summa  $\bar{u} + \bar{w}$  on aliavaruuden  $W$  alkio. Huomataan, että

$$\begin{aligned}\bar{u} + \bar{w} &= (a_1\bar{v}_1 + \dots + a_k\bar{v}_k) + (b_1\bar{v}_1 + \dots + b_k\bar{v}_k) \\ &= (a_1 + b_1)\bar{v}_1 + \dots + (a_k + b_k)\bar{v}_k.\end{aligned}$$

Koska  $\bar{u} + \bar{w}$  on vektoreiden  $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_k$  lineaarikombinaatio, pätee  $\bar{u} + \bar{w} \in W$ . □

**Esimerkki 4.7.** Tutkitaan, kuuluuko vektori  $\bar{w} = (-2, 3, 2, -1)$  vektoreiden

$$\bar{v}_1 = (0, -1, 2, 1), \quad \bar{v}_2 = (2, 0, 1, -1) \quad \text{ja} \quad \bar{v}_3 = (4, 2, 2, 0)$$

virittämään aliavaruuteen  $\text{span}(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$ . On siis selvitettävä, onko olemassa reaalilukuja  $x_1, x_2, x_3$ , joille pätee

$$x_1\bar{v}_1 + x_2\bar{v}_2 + x_3\bar{v}_3 = \bar{w}.$$

Toisin sanoen on pääteltävä, onko  $\bar{w}$  vektoreiden  $\bar{v}_1, \bar{v}_2$  ja  $\bar{v}_3$  lineaarikombinaatio.

Sijoittamalla annetut vektorit yllä olevaan yhtälöön saadaan

$$x_1(0, -1, 2, 1) + x_2(2, 0, 1, -1) + x_3(4, 2, 2, 0) = (-2, 3, 2, -1)$$

ja laskemalla kerto- ja yhteenlaskut auki yhtälö voidaan vielä muuttaa muotoon

$$(2x_2 + 4x_3, -x_1 + 2x_3, 2x_1 + x_2 + 2x_3, x_1 - x_2) = (-2, 3, 2, -1).$$

Kun tarkastellaan jokaista komponenttia erikseen, saatua vektoriyhtälöä vastaa yhtälöryhmä

$$\begin{cases} 2x_2 + 4x_3 &= -2 \\ -x_1 + 2x_3 &= 3 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 &= 2 \\ x_1 - x_2 &= -1 \end{cases}$$

Miten tällainen yhtälöryhmä ratkaistaan? Ennen kuin syvennymme enemmän vektoreiden virittämiin aliavaruuksiin, on syytä perehtyä yhtälöryhmien ratkaisemiseen.

## 5 Lineaariset yhtälöryhmät

Edellisen luvun lopun esimerkissä päädyttiin yhtälöryhmään, jonka ratkaisusta riippui, kuuluuko tietty vektori eräiden toisten vektorien virittämään aliavaruuteen. Tämäntyyppisiä tilanteita esiintyy lineaarialgebrassa jatkuvasti, ja kysymykset voivat olla hyvin monimuotoisia. Esimerkiksi mainitussa esimerkissä ei itse asiassa tarvittu yhtälöryhmän varsinaista ratkaisua, vaan oli ainoastaan osoitettava sen *olemassaolo*. Toisissa kysymyksissä olennaista saattaa olla, onko mahdollisia ratkaisuja yksi vai useampia. Joidenkin yhtälöryhmien kohdalla haluamme selvittää, minkälaisen aliavaruuden ratkaisut muodostavat.

**Esimerkki 5.1.** Tarkastellaan yhtälöryhmää

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 1 \\ -x + 2y = -1 \\ 2x + 4y + z = 0 \end{cases}$$

Kysymyksessä on niin sanottu lineaarinen yhtälöryhmä, koska yhtälöt ovat kaikki ensimmäisen asteen yhtälöitä. Yritetään ratkaista yhtälöryhmä eli löytää sellaiset luvut  $x$ ,  $y$  ja  $z$ , että kaikki ryhmän yhtälöt toteutuvat yhtä aikaa.

Aloitetaan ratkaisemalla toisesta yhtälöstä  $x$ :

$$-x + 2y = -1 \iff x = 2y + 1.$$

Sijoitetaan sitten saatu  $x$  ensimmäiseen yhtälöön, ja ratkaistaan  $z$ :

$$3(2y + 1) + 2y + z = 1 \iff 6y + 3 + 2y + z = 1 \iff z = -8y - 2.$$

Sijoitetaan sitten sekä  $x$  että  $z$  kolmanteen yhtälöön, jotta voitaisiin ratkaista  $y$ :

$$2(2y + 1) + 4y - 8y - 2 = 0 \iff 4y + 2 + 4y - 8y - 2 = 0 \iff 0 = 0.$$

Päädyttiin tulokseen  $0 = 0$ . Miten tämä pitäisi tulkita? Onko ratkaisuja yksi vai useampia? Päteekö yhtälö ehkä kaikilla luvuilla? Selvästihän  $x$  ja  $z$  kuitenkin riippuvat  $y$ :stä, koska ne ratkaistiin yllä  $y$ :n lausekkeina. Mutta samalla tavoinhan  $y$ :n voitaisiin ajatella riippuvan  $x$ :stä ja  $z$ :sta. Vai olisiko sijoitus pitänyt tehdä jossain toisessa järjestyksessä?

Esimerkki osoittaa, että yhtälöryhmien monimutkaistuessa tarvitaan jokin järjestelmällinen menetelmä, jota käyttämällä sekä saadaan aina varmasti jokin vastaus että pystytään tulkitsemaan vastauksen merkitys. Tässä luvussa esiteltävä Gaussin–Jordanin eliminointimenetelmä redusoi minkä tahansa lineaarisen yhtälöryhmän sellaiseen muotoon, että kaikkiin (ainakin tällä kurssilla tarvittaviin) kysymyksiin voidaan helposti antaa vastaus.

### 5.1 Lineaarisen yhtälöryhmän määritelmä

*Lineaarinen yhtälöryhmä* on yhtälöryhmä, joka on muotoa

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

missä  $a_{11}, \dots, a_{mn}, b_1, \dots, b_m \in \mathbb{R}$ . Symbolit  $x_1, x_2, \dots, x_n$  ovat yhtälöiden *tuntemattomia*. Lukuja  $a_{11}, \dots, a_{mn}$  nimitetään yhtälöryhmän *kertoimiksi* ja lukuja  $b_1, b_2, \dots, b_m$  *vakioiksi*. Jos tuntemattomia on vähän, niitä merkitään yleensä symboleilla  $x, y, z$  ja niin edelleen.

Esimerkiksi

$$\begin{cases} -4x_1 + \sqrt{3}x_2 + 2x_3 = 4 \\ x_1 + \frac{6}{8}x_3 = 0 \\ 5x_1 + \sqrt{2}x_2 + 11x_3 = -3 \\ -6x_2 - 32x_3 = 4 \end{cases}$$

on lineaarinen yhtälöryhmä.

Lineaarisen yhtälöryhmän ratkaiseminen merkitsee sitä, että löydetään kaikki ne luvut, jotka tuntemattomien  $x_1, \dots, x_n$  paikalle sijoitettuina toteuttavat yhtä aikaa kaikki yhtälöt.

Lineaarisen yhtälöryhmän ratkaisemisen kannalta oleellista ovat vain kertoimien ja vakioiden arvot, esimerkiksi tuntemattomien nimityksellä ei ole merkitystä. Kaikki tieto yhtälöryhmästä voidaan tiivistää lukutaulukkoon eli *matriisiin*, jossa luetellaan kaikki kertoimet sekä vakiot. Kun käsitellään yhtälöryhmien sijasta matriiseja, on kirjoitettavaa paljon vähemmän, sillä tuntemattomia ei tarvitse kirjata ylös.

Esimerkiksi edellä esitellyn yhtälöryhmän matriisi on

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} -4 & \sqrt{3} & 2 & 4 \\ 1 & 0 & \frac{6}{8} & 0 \\ 5 & \sqrt{2} & 11 & -3 \\ 0 & -6 & -32 & 4 \end{array} \right].$$

Selkeyden vuoksi kertoimet on tapana erottaa vakioista pystyviivalla. Viivalla ei kuitenkaan ole matemaattista merkitystä. Huomaa, että matriisiin on kirjoitettava nolla niiden termien kohdalle, jotka puuttuvat yhtälöryhmästä. Kyseisten termien kertoimena on nimittäin nolla.

Kappaleessa 8 tutustutaan matriisien teoriaan yleisemmin. Tässä luvussa käsittelemme vain yhtälöryhmistä saatuja matriiseja.

## 5.2 Alkeisrivitoimitukset ja porrasmatriisit

Seuraavaksi käydään läpi menetelmä, jolla voidaan ratkaista mikä tahansa lineaarinen yhtälöryhmä. Ideana on muokata yhtälöryhmästä uusia yhtälöryhmiä, joilla on samat ratkaisut kuin alkuperäisellä yhtälöryhmällä. Viimeisenä saatu yhtälöryhmä on sellaisessa muodossa, josta sen ratkaisuja koskeviin kysymyksiin on helppo vastata. Koska viimeisen yhtälöryhmän ratkaisut ovat samat kuin alkuperäisen yhtälöryhmän, myös alkuperäisen yhtälöryhmän ratkaisut ja niiden luonne tunnetaan.

**Määritelmä 5.2.** Yhtälöryhmiä kutsutaan *ekvivalenteiksi*, jos niillä on täsmälleen samat ratkaisut.

Ryhdyimme muokkaamaan yhtälöryhmiä niin kutsutuilla alkeisrivitoimituksilla. Niiden avulla tuotetaan uusia yhtälöryhmiä, jotka ovat ekvivalenteja alkuperäisen yhtälöryhmän kanssa. Koska matriisien käsitteleminen on helpompaa kuin yhtälöryhmien, tehdään alkeisrivitoimitukset suoraan matriiseille.

**Määritelmä 5.3.** Seuraavat kolme operaatiota ovat *alkeisrivitoimituksia*:

- 1) Vaihdetaan kahden rivin paikka matriisissa.
- 2) Kerrotaan jokin rivi nolasta poikkeavalla reaaliluvulla.
- 3) Lisätään johonkin riviin jokin toinen rivi reaaliluvulla kerrottuna.

Alkeisrivitoimituksille käytetään tässä materiaalissa seuraavia lyhennysmerkitöjä

- $R_i \leftrightarrow R_j$ : vaihdetaan rivien  $i$  ja  $j$  paikat ( $i \neq j$ ).
- $aR_i$ : kerrotaan rivi  $i$  luvulla  $a \neq 0$ .
- $R_i + bR_j$ : lisätään riviin  $i$  rivi  $j$  luvulla  $b$  kerrottuna ( $i \neq j$ ).

**Esimerkki 5.4.** Seuraavassa on annettu esimerkit erilaisista alkeisrivitoimituksista:

$$\left[ \begin{array}{cc|c} -4 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \\ 5 & 3 & 2 \\ 0 & 6 & 4 \end{array} \right] \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -1 \\ -4 & 3 & 4 \\ 5 & 3 & 2 \\ 0 & 6 & 4 \end{array} \right] \xrightarrow{R_3 - 5R_1} \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -1 \\ -4 & 3 & 4 \\ 0 & -7 & 7 \\ 0 & 6 & 4 \end{array} \right] \xrightarrow{-\frac{1}{7}R_3} \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -1 \\ -4 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 6 & 4 \end{array} \right]$$

**Määritelmä 5.5.** Matriisi  $A$  on *riviekvivalentti* matriisin  $B$  kanssa, jos  $B$  saadaan matriisista  $A$  alkeisrivitoimituksilla.

Esimerkiksi edellisen esimerkin matriisit

$$\left[ \begin{array}{cc|c} -4 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \\ 5 & 3 & 2 \\ 0 & 6 & 4 \end{array} \right] \quad \text{ja} \quad \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -1 \\ -4 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 6 & 4 \end{array} \right]$$

ovat riviekvivalentit. Alkeisrivitoimituksia voidaan ajatella tehtävän myös nolla kappaletta. Siten jokainen matriisi on itsensä kanssa riviekvivalentti.

**Lause 5.6.** Jos yhtälöryhmiä vastaavat matriisit ovat riviekvivalentit, yhtälöryhmät ovat ekvivalentit.

Lause voidaan muotoilla myös toisin: jos yhtälöryhmiä vastaavat matriisit ovat riviekvivalentit, yhtälöryhmällä on täsmälleen samat ratkaisut. Alkeisrivitoimituksen tekeminen ei siis muuta yhtälöryhmän ratkaisuja. Lauseen todistus on esitetty luvun lopussa.

Yhtälöryhmää ratkaistaessa on tavoitteena muuttaa yhtälöryhmän matriisi alkeisrivitoimituksilla niin kutsutuksi redusoiduksi porrasmatriisiksi, josta ratkaisut on helppo lukea. Määritellään ensin porrasmatriisi.

**Määritelmä 5.7.** Matriisi on *porrasmatriisi*, jos seuraavat ehdot toteutuvat:

- 1) mahdolliset nollarivit ovat alimpina
- 2) kullakin rivillä ensimmäinen nolasta poikkeava alkio, ns. *johtava alkio*, on ylemmän rivin johtavan alkion oikealla puolella.



$$\begin{array}{ccc}
\left[ \begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right] & \xrightarrow{\text{alkeisrivi-} \\ \text{toimituksia}} & \left[ \begin{array}{cccc|c} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} & d_1 \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} & d_2 \\ & & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} & d_m \end{array} \right] \\
\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad \qquad \qquad \vdots = \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \right. & \xleftarrow{\text{samat} \\ \text{ratkaisut}} \xrightarrow{\qquad} & \left\{ \begin{array}{l} c_{11}x_1 + \cdots + c_{1n}x_n = d_1 \\ c_{21}x_1 + \cdots + c_{2n}x_n = d_2 \\ \qquad \qquad \qquad \vdots = \vdots \\ c_{m1}x_1 + \cdots + c_{mn}x_n = d_m \end{array} \right.
\end{array}$$

Kuva 5.18: Gaussin–Jordanin eliminointimenetelmän perusta.

Esimerkiksi seuraavat matriisit ovat porrasmatriiseja. Niiden johtavat alkiot on lihavoitu.

$$\left[ \begin{array}{cccc} \mathbf{14} & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & \mathbf{8} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{-3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad \left[ \begin{array}{cccccc} 0 & 0 & \mathbf{4} & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{-1} & 7 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & -3 \end{array} \right] \quad \left[ \begin{array}{cccccc} \mathbf{-3} & -41 & 1 & 0 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{5} & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Porrasmuoto auttaa jo yhtälöryhmän ratkaisemisessa, mutta se ei ole yksikäsitteinen. Kuktakin matriisia kohden löytyy nimittäin useampi kuin yksi sen kanssa riviekvivalentti porrasmatriisi. Porrasmatriisi voidaan kuitenkin muokata alkeisrivitoimitusten avulla redusoituun muotoon, joka on kullekin matriisille yksikäsitteinen.

**Määritelmä 5.8.** Matriisi on *redusoitu porrasmatriisi*, jos seuraavat ehdot toteutuvat:

- 1) matriisi on porrasmatriisi
- 2) jokaisen rivin johtava alkio on 1
- 3) jokainen johtava alkio on sarakkeensa ainoa nollasta poikkeava alkio.

Esimerkiksi seuraavat matriisit ovat redusoituja porrasmatriiseja. Johtavat ykköset on jälleen lihavoitu.

$$\left[ \begin{array}{cccc} \mathbf{1} & 0 & 0 & 4 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad \left[ \begin{array}{cccccc} 0 & 0 & \mathbf{1} & -53 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & -3 \end{array} \right] \quad \left[ \begin{array}{cccccc} \mathbf{1} & 3 & 0 & 0 & -3 & 8 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & -3 & 5 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

**Esimerkki 5.9.** Matriisi

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right]$$

on redusoitu porrasmatriisi. Sitä vastaava yhtälöryhmä on

$$\begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = -2 \\ x_3 = 3 \end{cases}$$

Huomataan, että matriisista näkyy suoraan yhtälöryhmän ratkaisu.

### 5.3 Gaussin–Jordanin eliminointimenetelmä

Tavoitteena on muuttaa yhtälöryhmän matriisi alkeisrivitoimitusten avulla redusoiduksi porrasmatriisiksi, josta ratkaisut näkyvät suoraan. Voidaan osoittaa, että mikä tahansa matriisi voidaan muuttaa tällä tavoin redusoiduksi porrasmatriisiksi ja että alkeisrivitoimitusten käyttämisjärjestys ei vaikuta tulokseen. Seuraava esimerkki näyttää, kuinka tämä tehdään.

**Esimerkki 5.10.** Muutetaan matriisi

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

redusoiduksi porrasmatriisiksi. Aloitetaan ensimmäisestä sarakkeesta. Vaihtamalla ensimmäisen ja toisen rivin paikat, saadaan ensimmäisen rivin johtavaksi alkiksi 1:

$$R_1 \leftrightarrow R_2 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \\ -1 & -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Tämän jälkeen johtavan alkion alla olevat alkio on helppo muuttaa nolliksi. Vähennetään ensin toisesta rivistä ensimmäinen rivi luvulla 2 kerrottuna:

$$R_2 - 2R_1 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Lisätään sitten kolmanteen riviin ensimmäinen rivi luvulla 1 kerrottuna:

$$R_3 + R_1 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Nyt ensimmäinen sarake on halutussa muodossa. Siirrytään muokkaamaan toista saraketta. Muutetaan ensin sen johtava alkio ykköseksi, jotta voidaan toimia samoin kuin edellä. Kerrotaan siis toinen rivi luvulla  $-1$ . Saadaan matriisi

$$\xrightarrow{-1 \cdot R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Toisen rivin johtavan alkion avulla voidaan muuttaa sen alla oleva alkio nolliksi. Lisätään kolmanteen riviin toinen rivi luvulla 2 kerrottuna. Saadaan matriisi

$$\xrightarrow{R_3+2R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{bmatrix},$$

joka on porrasmatriisi.

Jatketaan muokkaamista niin, että saadaan aikaan redusoitu porrasmatriisi. Muutetaan ensin viimeinenkin johtava alkio ykköseksi:

$$\xrightarrow{\frac{1}{4}R_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Muutetaan alimman rivin johtavan alkion avulla kaikki kolmannen sarakkeen muut alkiot nolliksi:

$$\xrightarrow{R_2-R_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1-2R_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Näin saatu matriisi on redusoitu porrasmatriisi.

Saatu redusoitu porrasmatriisi on eri matriisi kuin se, josta lähdettiin liikkeelle. Matriisit myös vastaavat erilaisia yhtälöryhmiä. Näillä yhtälöryhmillä on kuitenkin samat ratkaisut lauseen 5.6 nojalla.

Ohjeita redusoidun porrasmatriisin aikaansaamiseksi:

- Porrasmatriisia muodostetaan vasemmalta oikealle ja ylhäältä alaspäin.
- Johtavat alkiot kannattaa useimmiten muuttaa ykköseksi.
- Johtavien alkioden avulla muutetaan niiden alapuolella olevat alkiot nolliksi. Näin saadaan aikaan porrasmatriisi.
- Redusoitua porrasmatriisia muodostetaan oikealta vasemmalle ja alhaalta ylöspäin.
- Johtavien alkioden avulla muutetaan niiden yläpuolella olevat alkiot nolliksi.
- Tee vain yksi alkeisrivitoimitus kerrallaan!

Toisinaan redusoituun porrasmatriisiin voi päätyä nopeammin käyttämällä jotakin toista reittiä. Edellä kuvattujen välivaiheiden seuraaminen on kuitenkin turvallista, sillä ne tuottavat aina redusoidun porrasmatriisin.

Nyt olemme valmiita ratkaisemaan yhtälöryhmiä. Yhtälöryhmän ratkaiseminen Gaussin–Jordanin menetelmää käyttäen sisältää seuraavat vaiheet:

1. Kirjoita yhtälöryhmän matriisi.
2. Muuta matriisi alkeisrivitoimituksilla porrasmatriisiksi.

3. Muuta porrasmatriisi redusoiduksi porrasmatriisiksi.
4. Lue ratkaisut redusoidusta porrasmatriisista.

**Esimerkki 5.11.** Ratkaistaan yhtälöryhmä

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_3 = 1 \\ -x_1 - 2x_2 = 3. \end{cases}$$

Yhtälöryhmän matriisi on

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & 3 \end{array} \right].$$

Tämä matriisi muutettiin redusoiduksi porrasmatriisiksi esimerkissä 5.10:

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right].$$

Redusoitua porrasmatriisia vastaava yhtälöryhmä on

$$\begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = 1 \end{cases}$$

Koska alkuperäisen yhtälöryhmän ratkaisut ovat lauseen 5.6 nojalla samat kuin lopuksi saadun yhtälöryhmän, on yhtälöryhmä ratkaistu. Sen ratkaisu on siis

$$\begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = 1 \end{cases}$$

**Esimerkki 5.12.** Ratkaistaan lineaarinen yhtälöryhmä

$$\begin{cases} x + 2y + z = 8 \\ -3x - 6y - 3z = -21 \end{cases}$$

Muutetaan yhtälöryhmän matriisi redusoiduksi porrasmatriisiksi:

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 8 \\ -3 & -6 & -3 & -21 \end{array} \right] \xrightarrow{R_2+3R_1} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right].$$

Vastaava yhtälöryhmä on

$$\begin{cases} x + 2y + z = 8 \\ 0 = 3. \end{cases}$$

Alin yhtälö on aina epätosi, joten yhtälöryhmällä ei ole ratkaisuja.

**Esimerkki 5.13.** Ratkaistaan lineaarinen yhtälöryhmä

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 - 15x_3 = 9 \\ x_1 - 2x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

Muutetaan yhtälöryhmän matriisi redusoiduksi porrasmatriisiksi:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 3 & 3 & -15 & | & 9 \\ 1 & 0 & -2 & | & 1 \\ 2 & -1 & -1 & | & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{3}R_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -5 & | & 3 \\ 1 & 0 & -2 & | & 1 \\ 2 & -1 & -1 & | & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2-R_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -5 & | & 3 \\ 0 & -1 & 3 & | & -2 \\ 2 & -1 & -1 & | & 0 \end{bmatrix} \\ & \xrightarrow{R_3-2R_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -5 & | & 3 \\ 0 & -1 & 3 & | & -2 \\ 0 & -3 & 9 & | & -6 \end{bmatrix} \xrightarrow{-1 \cdot R_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -5 & | & 3 \\ 0 & 1 & -3 & | & 2 \\ 0 & -3 & 9 & | & -6 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3+3R_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -5 & | & 3 \\ 0 & 1 & -3 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \\ & \xrightarrow{R_1-R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & | & 1 \\ 0 & 1 & -3 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Saatua matriisia vastaa yhtälöryhmä

$$\begin{cases} x_1 - 2x_3 = 1 \\ x_2 - 3x_3 = 2 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Alin yhtälö  $0 = 0$  on aina tosi. Se ei siis anna ratkaisujen kannalta mitään informaatiota. Tuntemattomalle  $x_3$  ei puolestaan aseteta mitään rajoitteita, joten se voi olla mikä tahansa reaaliluku. Sanotaan, että  $x_3$  on *vapaa muuttuja*. Merkitään  $x_3 = t$ , missä  $t \in \mathbb{R}$ .

Ratkaistaan vielä muut tuntemattomat. Ensimmäinen yhtälö on  $x_1 - 2t = 1$ , joten  $x_1 = 1 + 2t$ . Toinen yhtälö puolestaan on  $x_2 - 3t = 2$  eli  $x_2 = 2 + 3t$ . Siten yhtälöryhmän ratkaisu on

$$\begin{cases} x_1 = 1 + 2t \\ x_2 = 2 + 3t \\ x_3 = t, \end{cases}$$

missä  $t \in \mathbb{R}$ . Ratkaisuja on siis äärettömän monta. Esimerkiksi  $x_1 = 3$ ,  $x_2 = 5$  ja  $x_3 = 1$  sekä  $x_1 = -1$ ,  $x_2 = -1$  ja  $x_3 = -1$  ovat yhtälöryhmän ratkaisuja. Jokaisella reaaliluvulla  $t$  yhtälöryhmälle saadaan eri ratkaisu.

Yhtälöryhmässä saattaa olla useitakin vapaita muuttujia. Nämä löytyvät redusoidussa porrasmatriisissa niistä sarakkeista, joissa ei ole lainkaan johtavaa alkioita.

**Esimerkki 5.14.** Lineaarisen yhtälöryhmän matriisi muutettiin alkeisrivitoimituksilla redusoiduksi porrasmatriisiksi

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 & 0 & 0 & | & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & | & 3 \end{bmatrix}.$$

Mikä on yhtälöryhmän ratkaisu?

Havaitaan, että johtavat alkio ovat sarakkeissa 1, 3 ja 6. Muita sarakkeita vastaavat tuntemattomat  $x_2$ ,  $x_4$  ja  $x_5$  ovat vapaita muuttujia. Merkitään  $x_2 = r$ ,  $x_4 = s$  ja  $x_5 = t$ , missä  $r$ ,  $s$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .

Nyt voidaan kirjoittaa

$$\begin{cases} x_1 + 3r + 4s = 7 \\ x_3 + 2s = 0 \\ x_6 = 3 \end{cases}$$

ja edelleen

$$\begin{cases} x_1 = 7 - 3r - 4s \\ x_3 = -2s \\ x_6 = 3 \end{cases}$$

Yhtälöryhmän ratkaisu on siis

$$\begin{cases} x_1 = 7 - 3r - 4s \\ x_2 = r \\ x_3 = -2s \\ x_4 = s \\ x_5 = t \\ x_6 = 3 \end{cases} \quad \text{missä } r, s, t \in \mathbb{R}.$$

Luvut  $r$ ,  $s$  ja  $t$  voidaan valita täysin vapaasti, ja jokainen valinta tuottaa yhtälöryhmän erään ratkaisun.

### Porrasmatriisien tulkinta

Edelliset esimerkit kuvaavat tilanteita, joihin Gaussin–Jordanin menetelmää käyttäen voidaan päätyä. Kootaan vielä yhteen redusoidun porrasmatriisin  $M$  merkitys sitä vastaavan yhtälöryhmän kannalta eri tapauksissa.

- Jos jokin matriisin  $M$  viimeisistä riveistä on muotoa  $[0 \ \cdots \ 0 \ | \ 1]$  (eli rivin johtava ykkönen on pystyviivan oikealla puolella), kyseistä riviä vastaa epätosi yhtälö  $0 = 1$ . Yhtälöryhmällä ei ole ratkaisua.
- Oletetaan, että edellinen tapaus ei toteudu. Jos joltakin matriisin  $M$  sarakeelta puuttuu johtava alkio (pystyviivan vasemmalta puolelta), tuota saraketta vastaava muuttuja on vapaa. Yhtälöryhmän ratkaisut voidaan esittää vapaiden muuttujien avulla. Kunkin vapaan muuttujan arvo voidaan valita vapaasti, joten yhtälöryhmällä on ratkaisuja ääretön määrä.
- Oletetaan, että edelliset tapaukset eivät toteudu. Tällöin matriisin  $M$  jokaisessa sarakeessa oikeanpuoleisinta lukuunottamatta on johtava alkio, ja yhtälöryhmällä on täsmälleen yksi ratkaisu.

**Esimerkki 5.15.** Usein kiinnostavaa ei ole yhtälöryhmän tarkka ratkaiseminen, vaan se, *kuinka monta* ratkaisua yhtälöryhmällä on. Tällöin ei tarvitse muuttaa yhtälöryhmän matriisia redusoituun porrasmuotoon, vaan pelkkä porrasmuoto riittää. Kaikkia tässä esimerkissä esitettyjä väitteitä ei perustella tarkasti, sillä pitkien ja teknisten todistusten kirjoittaminen ei olisi mielekäästä.

Oletetaan, että yhtälöryhmän matriisi on saatu alkeisrivitoimituksilla muotoon

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 4 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

Toiseksi viimeinen rivi vastaa yhtälöä  $0 = -4$ , joka on aina epätosi. Nyt tiedetään, että alkuperäisellä yhtälöryhmällä ei ole ratkaisuja, eikä redusoiduksi porrasmatriisiksi muuttaminen ole tarpeellista.

Tutkitaan sitten yhtälöryhmää, jonka matriisi on saatu alkeisrivitoimituksilla porrasmatriisiksi

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} 4 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -4 \end{array} \right].$$

Tässäkin tapauksessa ratkaisujen lukumäärä nähdään suoraan. Koska porrasmatriisissa ei näy yhtälöä, joka olisi epätosi, ei sellaista tule redusoituun porrasmatriisiin. Siten voidaan sanoa suoraan porrasmatriisin perusteella, että yhtälöryhmällä on ratkaisuja. Huomataan vielä, että porrasmatriisin kolmannessa sarakkeessa ei ole johtavaa alkioita. Jos matriisi muutettaisiin redusoiduksi porrasmatriisiksi, ei siinäkään olisi johtavaa alkioita kolmannessa sarakkeessa. Siten yhtälöryhmällä on äärettömän monta ratkaisua, ja sen näkee suoraan porrasmatriisista.

Tarkastellaan vielä lopuksi yhtälöryhmää, jonka matriisi on saatu alkeisrivitoimituksilla porrasmatriisiksi

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 4 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{array} \right].$$

Epätosia yhtälöitä ei ole, joten yhtälöryhmällä on ratkaisuja. Koska jokaisessa sarakkeessa on johtava alkio, voidaan päätellä, että vapaita muuttujia ei ole. Siten yhtälöryhmällä on täsmälleen yksi ratkaisu.

**Esimerkki 5.16.** Tarkastellaan yhtälöryhmää

$$\begin{cases} x + y + kz = 1 \\ x + ky + z = 1 \\ kx + y + z = -2. \end{cases}$$

Tutkitaan, miten luvun  $k$  arvot vaikuttavat ratkaisujen lukumäärään. Ryhdytään muuttamaan yhtälöryhmän matriisia redusoiduksi porrasmatriisiksi:

$$\begin{array}{c}
\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ k & 1 & 1 & -2 \end{array} \right] \xrightarrow{R_2 - R_1} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & 1 \\ 0 & k-1 & 1-k & 0 \\ k & 1 & 1 & -2 \end{array} \right] \\
R_3 - kR_1 \xrightarrow{\quad} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & 1 \\ 0 & k-1 & 1-k & 0 \\ 0 & 1-k & 1-k^2 & -2-k \end{array} \right] \xrightarrow{R_3 + R_2} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & 1 \\ 0 & k-1 & 1-k & 0 \\ 0 & 0 & 2-k-k^2 & -2-k \end{array} \right]
\end{array}$$

Kaikki alkeisrivitoimitukset voidaan tähän asti tehdä riippumatta siitä, mikä luku  $k$  on. Jatkaminen ei kuitenkaan onnistu, sillä toisen rivin alkio  $k - 1$  saattaa olla nolla, samoin kolmannen rivin alkio  $2 - k - k^2$ . Tarkastellaan näitä tapauksia erikseen.

Oletetaan ensin, että kolmannen rivin alkio  $2 - k - k^2 = 0$  eli  $k = -2$  tai  $k = 1$ .

- Jos  $k = -2$ , viimeinen matriisi on

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

Havaitaan, että alinta riviä vastaava yhtälö  $0 = 0$  on aina tosi. Lisäksi tuntematonta  $x_3$  vastaavassa sarakkeessa ei ole johtavaa alkioita, joten  $x_3$  on vapaa muuttuja. Ratkaisuja on siten äärettömän monta.

- Jos  $k = 1$ , viimeinen matriisi on

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array} \right].$$

Havaitaan, että alinta riviä vastaava yhtälö  $0 = -3$  on aina epätosi. Siten yhtälöryhmällä ei ole ratkaisuja.

Oletetaan sitten, että toisen rivin alkio  $k - 1 = 0$  eli  $k = 1$ . Tämä tapaus käsiteltiin sattumalta jo edellä.

Tarkastellaan vielä lopuksi tilannetta, jossa sekä toisen rivin alkio  $k - 1$  että kolmannen rivin alkio  $2 - k - k^2$  ovat nolasta poikkeavia. Tällöin voidaan jatkaa alkeisrivitoimitusten tekemistä. Koska  $k - 1 \neq 0$  ja  $2 - k - k^2 \neq 0$  saadaan

$$\begin{array}{c}
\frac{1}{k-1}R_2 \xrightarrow{\quad} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2-k-k^2 & -2-k \end{array} \right] \xrightarrow{\frac{1}{2-k-k^2}R_3} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-2-k}{2-k-k^2} \end{array} \right].
\end{array}$$

Tällöin yhtälöryhmällä on täsmälleen yksi ratkaisu.

Päädettiin siis seuraavaan tulokseen: Yhtälöryhmällä on äärettömän monta ratkaisua, jos ja vain jos  $k = -2$ . Yhtälöryhmällä ei ole ratkaisua, jos ja vain jos  $k = 1$ . Yhtälöryhmällä on tasan yksi ratkaisu, jos ja vain jos  $k \neq 1$  ja  $k \neq -2$ .



**Esimerkki 5.17.** Redusoidut porrasmatriisit ovat teoreettisesti mielenkiintoisia, koska jokaisista matriisista vastaa täsmälleen yksi redusoitu porrasmatriisi. Edellä kuitenkin nähtiin, että yhtälöryhmän ratkaisujen lukumäärä on luettavissa jo porrasmatriisista. Itse asiassa yhtälöryhmä voidaan jopa ratkaista porrasmatriisivaiheen avulla.

Esimerkin 5.13 yhtälöryhmää vastaava porrasmatriisi oli

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

Koska kolmannessa sarakkeessa ei ole johtavaa alkioita, sitä vastaava muuttuja on vapaa. Tähän havaintoon ei tarvita redusoitua porrasmuotoa. Jos merkitään  $x_3 = t$ , muut muuttujat voidaan ratkaista  $t$ :n avulla. Toisen rivin perusteella

$$x_2 - 3t = 2 \iff x_2 = 2 + 3t,$$

ja tämän jälkeen ensimmäisen rivin perusteella

$$x_1 + x_2 - 5t = 3 \iff x_1 + (3t + 2) - 5t = 3 \iff x_1 = 1 + 2t.$$

Porrasmatriisi siis riittää yhtälöryhmän ratkaisemiseen.

*Historiallinen huomautus.* Gauss ei itse kehittänyt nimeään kantavaa menetelmää, vaan sen tunsivat jo ainakin Newton sata vuotta aikaisemmin 1600-luvun loppupuolella. Kiinalaiset puolestaan tunsivat menetelmän jo toisella vuosisadalla eKr. Nimitys ”Gaussin eliminointimenetelmä” tuli käyttöön kuitenkin vasta 1950-luvulla. Tällä nimityksellä tarkoitetaan yleensä nimenomaan porrasmatriisiin tähtäävää menetelmää, ja mikäli halutaan jatkaa redusoitua porrasmatriisiin asti, menetelmää kutsutaan ”Gaussin–Jordanin eliminoinniksi”. Jordan esitti tämän version eliminointimenetelmästä vuonna 1887.

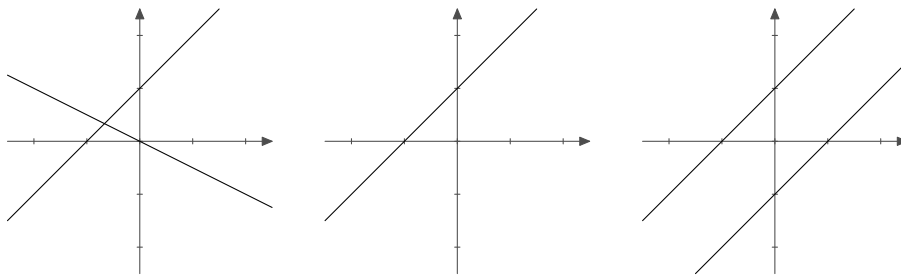
## Geometrinen tulkinta

Yhtälöryhmällä voi siis olla täsmälleen yksi ratkaisu, äärettömän monta ratkaisua tai ei yhtään ratkaisua. Kun muuttujia on kaksi tai kolme, tilannetta voi havainnollistaa analyttisen geometrian avulla. Tutkitaan yhtälöparia

$$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f. \end{cases}$$

Oletetaan, että yhtälöllä on ratkaisu  $x = r$ ,  $y = s$ . Sitä voidaan ajatella tason pisteenä  $(r, s)$ . Koska ratkaisu toteuttaa ensimmäisen yhtälön, piste  $(r, s)$  on suoralla, jonka yhtälö on  $ax + by = c$ . Samoin piste  $(r, s)$  on suoralla, jonka yhtälö on  $dx + ey = f$ . Piste  $(r, s)$  on siis molemmilla suorilla, eli se on suorien leikkauspiste.

Jos yhtälöt määrittävät kaksi erisuuntaista suoraa, on niillä täsmälleen yksi leikkauspiste. Tällöin yhtälöparilla on täsmälleen yksi ratkaisu. Jos yhtälöt määrittävät saman suoran, on leikkauspisteitä äärettömän monta. Silloin ratkaisujakin on äärettömän monta. Jos yhtälöiden



Kuva 5.19: Yhtälöryhmällä on tasan yksi ratkaisu, äärettömän monta ratkaisua tai ei yhtään ratkaisua.

määrittämät suorat eivät ole samat mutta ovat kuitenkin yhdensuuntaiset, ei leikkauspisteitä ole. Silloin ei myöskään yhtälöparilla ole ratkaisuja.

Kun muuttujia on kolme, yhtälöt kuvaavat tasoja. Esimerkiksi kolmen tason leikkausjoukko voi olla piste, suora tai taso. Nämä vastaavat tilanteista, joissa ratkaisuun tulee nolla, yksi tai kaksi vapaata muuttujaa. Leikkausjoukko voi olla myös tyhjä, jolloin yhtälöryhmällä ei ole ratkaisuja.

## 5.4 Yhtälöryhmien ekvivalenssin todistus

Käydään vielä lopuksi todistus sille, että yhtälöryhmillä on samat ratkaisut, jos niiden matriisit ovat riviekvivalentit (lause 5.6).

*Lauseen 5.6 todistus.* Osoitetaan, että jos yhtälöryhmiä vastaavat matriisit ovat riviekvivalentit, yhtälöryhmät ovat ekvivalentit. Tätä varten riittää näyttää, että alkeisrivitoimituksen tekeminen ei vaikuta yhtälöryhmän ratkaisuihin. Tutkitaan yhtälöryhmää

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \quad (1)$$

missä  $a_{11}, \dots, a_{mn}, b_1, \dots, b_m \in \mathbb{R}$ .

1. Ensinnäkin huomataan, että yhtälöryhmän rivien järjestyksellä ei ole väliä. Siten kahden rivin paikkojen vaihtaminen ei muuta yhtälöryhmän ratkaisuja.

2. Tutkitaan sitten alkeisrivitoimitusta, joka kertoo rivin  $i$  luvulla  $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Tuloksena on yhtälöryhmä

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ ca_{i1}x_1 + ca_{i2}x_2 + \cdots + ca_{in}x_n = cb_i \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \quad (2)$$

On osoitettava, yhtälöryhmillä (1) ja (2) on samat ratkaisut. Tämä tehdään kahdessa osassa. Ensin näytetään, että jokainen yhtälöryhmän (1) ratkaisu on myös yhtälöryhmän (2) ratkaisu. Sitten näytetään, että jokainen yhtälöryhmän (2) ratkaisu on myös yhtälöryhmän (1) ratkaisu.

Oletetaan ensin, että  $x_1 = r_1, \dots, x_n = r_n$  on yhtälöryhmän (1) ratkaisu ja osoitetaan, että se on myös ryhmän (2) ratkaisu. Oletuksen perusteella pätee

$$\begin{cases} a_{11}r_1 + a_{12}r_2 + \cdots + a_{1n}r_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{i1}r_1 + a_{i2}r_2 + \cdots + a_{in}r_n = b_i \\ \vdots \\ a_{m1}r_1 + a_{m2}r_2 + \cdots + a_{mn}r_n = b_m. \end{cases}$$

Kun  $i$ :nнен yhtälön molemmat puolet kerrotaan luvulla  $c$ , saadaan yhtälö

$$ca_{i1}r_1 + \cdots + ca_{in}r_n = cb_i.$$

Nyt siis  $x_1 = r_1, \dots, x_n = r_n$  toteuttaa yhtälöryhmän (2), ja siten se on myös yhtälöryhmän (2) ratkaisu.

Oletetaan sitten, että  $x_1 = s_1, \dots, x_n = s_n$  on yhtälöryhmän (2) ratkaisu ja osoitetaan, että se on myös ryhmän (1) ratkaisu. Nyt siis

$$\begin{cases} a_{11}s_1 + a_{12}s_2 + \cdots + a_{1n}s_n = b_1 \\ \vdots \\ ca_{i1}s_1 + ca_{i2}s_2 + \cdots + ca_{in}s_n = cb_i \\ \vdots \\ a_{m1}s_1 + a_{m2}s_2 + \cdots + a_{mn}s_n = b_m. \end{cases}$$

Koska  $c \neq 0$ , voidaan  $i$ :nнен yhtälön molemmat puolet jakaa luvulla  $c$ . Tällöin saadaan yhtälö  $a_{i1}s_1 + \cdots + a_{in}s_n = b_i$ . Nyt nähdään, että  $x_1 = s_1, \dots, x_n = s_n$  toteuttaa myös yhtälöryhmän (1), joten se on myös yhtälöryhmän (1) ratkaisu. Siten yhtälöryhmillä on samat ratkaisut.

3. Kolmannen alkeisrivitoituksen tarkastelu jätetään lukijalle.

□

## 6 Virittäminen

Edellisessä luvussa opittiin vastaamaan erilaisiin lineaaristen yhtälöryhmien ratkaisuja koskeviin kysymyksiin. Hyödynnetään näitä tietoja nyt avaruuden  $\mathbb{R}^n$  aliavaruuksien tutkimiseen. Palautetaan mieleen, että vektoreiden  $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k \in \mathbb{R}^n$  virittämä aliavaruus on joukko

$$\text{span}(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k) = \{a_1\bar{v}_1 + a_2\bar{v}_2 + \dots + a_k\bar{v}_k \mid a_1, a_2, \dots, a_k \in \mathbb{R}\}.$$

**Esimerkki 6.1.** Tutkitaan kuuluuko vektori  $\bar{w} = (10, -3, 7)$  vektoreiden  $\bar{v}_1 = (3, -1, 2)$ ,  $\bar{v}_2 = (0, 1, -1)$  ja  $\bar{v}_3 = (4, 2, 0)$  virittämään aliavaruuteen. On siis selvitettävä, onko olemassa reaalilukuja  $x_1, x_2, x_3$ , joille pätee  $\bar{w} = x_1\bar{v}_1 + x_2\bar{v}_2 + x_3\bar{v}_3$ . Saadaan ratkaistavaksi yhtälö

$$(10, -3, 7) = x_1(3, -1, 2) + x_2(0, 1, -1) + x_3(4, 2, 0),$$

joka muuttuu muotoon

$$(10, -3, 7) = (3x_1 + 4x_3, -x_1 + x_2 + 2x_3, 2x_1 - x_2).$$

Saadaan ratkaistavaksi yhtälöryhmä

$$\begin{cases} 3x_1 + & + 4x_3 = 10 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 = -3 \\ 2x_1 - x_2 & = 7 \end{cases}$$

Ratkaistaan yhtälöryhmä Gaussin-Jordanin eliminointimenetelmällä:

$$\begin{aligned} \left[ \begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 4 & 10 \\ -1 & 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 0 & 7 \end{array} \right] & \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left[ \begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & -3 \\ 3 & 0 & 4 & 10 \\ 2 & -1 & 0 & 7 \end{array} \right] \xrightarrow{(-1)R_1} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 3 \\ 3 & 0 & 4 & 10 \\ 2 & -1 & 0 & 7 \end{array} \right] \xrightarrow{R_2 - 3R_1} \\ \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & 10 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 7 \end{array} \right] & \xrightarrow{R_3 - 2R_1} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & 10 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 10 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{R_3 - 3R_2} \\ \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

Viimeisestä porrasmatriisista nähdään, että yhtälöryhmällä on ratkaisuja, sillä epätosiä yhtälöitä ei ole.

Siten on olemassa reaaliluvut  $x_1, x_2$  ja  $x_3$ , joille pätee  $\bar{w} = x_1\bar{v}_1 + x_2\bar{v}_2 + x_3\bar{v}_3$ . (Jos haluaa tietää, mitkä nämä luvut ovat, yhtälöryhmä on ratkaistava loppuun asti. Tietoa ei kuitenkaan tarvita tehtävän ratkaisuun.) Nyt tiedetään, että  $\bar{w} \in \text{span}(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$ .

**Esimerkki 6.2.** Nyt osaamme vastata myös esimerkissä 4.5 esitettyyn kysymykseen. Esimerkissä haluttiin tietää, kuuluuko vektori  $\bar{w} = (-2, 3, 2, -1)$  vektoreiden

$$\bar{v}_1 = (0, -1, 2, 1), \quad \bar{v}_2 = (2, 0, 1, -1) \quad \text{ja} \quad \bar{v}_3 = (4, 2, 2, 0)$$

virittämään aliavaruuteen  $\text{span}(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$ . Tällöin päädyttiin yhtälöryhmään

$$\begin{cases} 2x_2 + 4x_3 = -2 \\ -x_1 + 2x_3 = 3 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 = -1. \end{cases}$$

Kun yhtälöryhmää käsitellään Gaussin–Jordanin eliminointimenetelmällä, nähdään, että ratkaisuja ei ole. Siten  $\bar{w} \notin \text{span}(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$ .

Kutakin virittäjävektorien joukkoa vastaa niiden virittämä aliavaruus. Toisinaan on annettu aliavaruus, ja halutaan tietää, virittävätkö jotkin tietyt vektorit sen. Erityisesti voidaan kysyä, virittävätkö jotkin annetut vektorit koko vektoriavaruuden  $\mathbb{R}^n$ . Tutkitaan näitä kysymyksiä seuraavissa esimerkeissä.

**Esimerkki 6.3.** Merkitään  $\bar{e}_1 = (1, 0)$  ja  $\bar{e}_2 = (0, 1)$ . Osoitetaan, että vektorit  $\bar{e}_1$  ja  $\bar{e}_2$  virittävät koko avaruuden  $\mathbb{R}^2$  eli että

$$\text{span}(\bar{e}_1, \bar{e}_2) = \mathbb{R}^2.$$

Kaksi joukkoa osoitetaan samoiksi näyttämällä, että kumpikin on toisen osajoukko. Tiedetään, että jokainen joukon  $\text{span}(\bar{e}_1, \bar{e}_2)$  vektori on avaruuden  $\mathbb{R}^2$  vektori, joten on selvää, että  $\text{span}(\bar{e}_1, \bar{e}_2) \subset \mathbb{R}^2$ . Näin ollen riittää näyttää, että  $\mathbb{R}^2 \subset \text{span}(\bar{e}_1, \bar{e}_2)$ . On siis osoitettava, että jokainen avaruuden  $\mathbb{R}^2$  vektori voidaan esittää vektoreiden  $\bar{e}_1$  ja  $\bar{e}_2$  lineaarikombinaationa.

Oletetaan, että  $\bar{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ . Nyt

$$\bar{v} = (v_1, v_2) = v_1(1, 0) + v_2(0, 1) = v_1\bar{e}_1 + v_2\bar{e}_2.$$

Koska  $\bar{v}$  voidaan kirjoittaa yllä olevassa muodossa, nähdään, että  $\bar{v} \in \text{span}(\bar{e}_1, \bar{e}_2)$ . Siispä  $\mathbb{R}^2 \subset \text{span}(\bar{e}_1, \bar{e}_2)$ , joten on osoitettu, että  $\text{span}(\bar{e}_1, \bar{e}_2) = \mathbb{R}^2$ .

**Esimerkki 6.4.** Tutkitaan, millä ehdolla vektori  $\bar{w} = (w_1, w_2, w_3)$  kuuluu vektoreiden

$$\bar{v}_1 = (3, 2, -1), \quad \bar{v}_2 = (2, -2, 6) \quad \text{ja} \quad \bar{v}_3 = (3, 4, -5)$$

virittämään aliavaruuteen  $\text{span}(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$ .

Jotta vektori  $\bar{w}$  olisi vektoreiden  $\bar{v}_1, \bar{v}_2$  ja  $\bar{v}_3$  lineaarikombinaatio, täytyy olla olemassa luvut  $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ , joille pätee

$$x_1\bar{v}_1 + x_2\bar{v}_2 + x_3\bar{v}_3 = \bar{w}.$$

Tästä saadaan yhtälöryhmä

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = w_1 \\ 2x_1 - 2x_2 + 4x_3 = w_2 \\ -x_1 + 6x_2 - 5x_3 = w_3 \end{cases}$$

Yhtälöryhmän matriisista saadaan alkeisrivitoimituksilla porrasmatriisi

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -6 & 5 & -w_3 \\ 0 & 10 & -6 & w_2 + 2w_3 \\ 0 & 0 & 0 & w_1 - 2w_2 - w_3 \end{array} \right]$$

Matriisista nähdään, että yhtälöryhmällä on ratkaisuja, jos ja vain jos alinta riviä vastaava yhtälö  $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = w_1 - 2w_2 - w_3$  on tosi eli  $w_1 - 2w_2 - w_3 = 0$ . Siten vektori  $\bar{w} = (w_1, w_2, w_3)$  on aliavaruudessa  $\text{span}(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$ , jos ja vain jos  $w_1 - 2w_2 - w_3 = 0$ .

Nyt aliavaruus  $\text{span}(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$  voidaan kirjoittaa uudessa muodossa:

$$\begin{aligned} \text{span}(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3) &= \{(w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{R}^3 \mid w_1 - 2w_2 - w_3 = 0\} \\ &= \{(w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{R}^3 \mid w_3 = w_1 - 2w_2\} \\ &= \{(w_1, w_2, w_1 - 2w_2) \mid w_1, w_2 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(w_1, 0, w_1) + (0, w_2, -2w_2) \mid w_1, w_2 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{w_1(1, 0, 1) + w_2(0, 1, -2) \mid w_1, w_2 \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Kyseessä on siis vektorien  $(1, 0, 1)$  ja  $(0, 1, -2)$  virittämä aliavaruus. Toisin sanottuna

$$\text{span}(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3) = \text{span}((1, 0, 1), (0, 1, -2)).$$

Eri vektorit voivat siis virittää saman aliavaruuden. Edes virittäjävektoreiden määrän ei tarvitse olla sama.

Toisinaan kaikkia virittäjävektoreita ei tarvita aliavaruuden virittämiseen. Seuraava lause osoittaa, että jos jokin virittäjävektori on toisten virittäjävektoreiden lineaarikombinaatio, se voidaan pudottaa pois virittäjävektoreiden joukosta.

**Lause 6.5.** *Oletetaan, että  $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_k \in \mathbb{R}^n$ . Oletetaan lisäksi, että  $\bar{w}$  on vektoreiden  $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_k$  lineaarikombinaatio. Tällöin*

$$\text{span}(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_k, \bar{w}) = \text{span}(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_k).$$

*Todistus.* ” $\subset$ ”: Oletetaan, että  $\bar{b} \in \text{span}(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k, \bar{w})$ . Nyt on olemassa reaali-lukukertoimet  $a_1, \dots, a_k, a_w \in \mathbb{R}$ , joille pätee

$$\bar{b} = a_1\bar{v}_1 + \dots + a_k\bar{v}_k + a_w\bar{w}.$$

Toisaalta koska  $\bar{w}$  on vektoreiden  $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k$  lineaarikombinaatio, on olemassa  $c_1, \dots, c_k \in \mathbb{R}$ , joille pätee

$$\bar{w} = c_1\bar{v}_1 + \dots + c_k\bar{v}_k.$$

Sijoitetaan tämä ensimmäiseen yhtälöön, jolloin saadaan

$$\begin{aligned} \bar{b} &= a_1\bar{v}_1 + \dots + a_k\bar{v}_k + a_w(c_1\bar{v}_1 + \dots + c_k\bar{v}_k) \\ &= a_1\bar{v}_1 + \dots + a_k\bar{v}_k + a_w c_1\bar{v}_1 + \dots + a_w c_k\bar{v}_k \\ &= (a_1 + a_w c_1)\bar{v}_1 + \dots + (a_k + a_w c_k)\bar{v}_k. \end{aligned}$$

Tästä nähdään, että  $\bar{b} \in \text{span}(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k)$ , joten

$$\text{span}(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k, \bar{w}) \subset \text{span}(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k).$$

” $\supset$ ”: Todistuksen toinen osa jätetään harjoitustehtäväksi. □

**Esimerkki 6.6.** Tutkitaan, virittävätkö vektorit

$$\bar{u}_1 = (1, 1, 0), \quad \bar{u}_2 = (1, 0, 1), \quad \bar{u}_3 = (0, 1, 1) \quad \text{ja} \quad \bar{u}_4 = (-2, 1, 1)$$

avaruuden  $\mathbb{R}^3$ . Oletetaan, että  $\bar{w} = (w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{R}^3$ . On selvitettävä, onko olemassa lukuja  $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}$ , joille pätee

$$x_1\bar{u}_1 + x_2\bar{u}_2 + x_3\bar{u}_3 + x_4\bar{u}_4 = \bar{w}.$$

Saadaan yhtälöryhmä, jonka matriisi on

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -2 & w_1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & w_2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & w_3 \end{array} \right].$$

Tästä saadaan alkeisrivitoimituksilla porrasmatriisi

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -2 & w_1 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & w_1 - w_2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & \frac{1}{2}(w_3 + w_2 - w_1) \end{array} \right].$$

Matriisista nähdään, että yhtälöryhmällä on ratkaisuja, olivatpa  $w_1, w_2$  ja  $w_3$  mitä lukuja tahansa. Siten  $\bar{w} \in \text{span}(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3, \bar{u}_4)$ . Näin ollen  $\mathbb{R}^3 = \text{span}(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3, \bar{u}_4)$ .

Edellisen esimerkin virittäjät  $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3, \bar{u}_4$  eivät ole parhaat mahdolliset. Koska yhtälöryhmässä on vapaita muuttujia, on yhtälöryhmällä äärettömän monta ratkaisua. Avaruuden  $\mathbb{R}^3$  alkioita voidaan siis kirjoittaa *usealla* eri tavalla virittäjävektorien lineaarikombinaatioina. Esimerkiksi jos  $\bar{w} = (1, 2, 3)$ , niin ratkaisut ovat

$$\begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = 1 + t \\ x_3 = 2 - 2t \\ x_4 = t \end{cases} \quad \text{missä } t \in \mathbb{R}.$$

Valitsemalla  $t = 3$  saadaan

$$(1, 2, 3) = 3\bar{u}_1 + 4\bar{u}_2 - 4\bar{u}_3 + 3\bar{u}_4$$

ja toisaalta valitsemalla  $t = 1$  saadaan

$$(1, 2, 3) = \bar{u}_1 + 2\bar{u}_2 + 0\bar{u}_3 + \bar{u}_4.$$

Tämä ei ole toivottavaa, vaan tavoitteena on löytää sellainen virittäjäjoukko, että aliavaruuden vektorit voidaan ilmaista virittäjävektorien lineaarikombinaatioina täsmälleen yhdellä tavalla. Tällaisia virittäjäjoukkoja tutkitaan seuraavassa luvussa.

## 7 Vapaus

Edellisen luvun lopussa tutkittiin vektoreiden  $\bar{u}_1 = (1, 1, 0)$ ,  $\bar{u}_2 = (1, 0, 1)$ ,  $\bar{u}_3 = (0, 1, 1)$  ja  $\bar{u}_4 = (-2, 1, 1)$  virittämää aliavaruutta  $W = \text{span}(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3, \bar{u}_4)$ . Silloin huomattiin, että aliavaruuden vektorin voi kirjoittaa monella eri tavalla virittäjävektoreiden lineaarikombinaationa. Esimerkiksi nollavektorin voi kirjoittaa muodossa  $\bar{0} = 0\bar{u}_1 + 0\bar{u}_2 + 0\bar{u}_3 + 0\bar{u}_4$ , muodossa  $\bar{0} = 1\bar{u}_1 + 1\bar{u}_2 + (-2)\bar{u}_3 + 1\bar{u}_4$  tai muodossa  $\bar{0} = 2\bar{u}_1 + 2\bar{u}_2 + (-4)\bar{u}_3 + 2\bar{u}_4$ . Tämä ei ole toivottavaa, sillä yleensä halutaan, että vektorit on mahdollista kirjoittaa virittäjävektorien lineaarikombinaationa täsmälleen yhdellä tavalla. Tällöin vaikkapa nollavektori saadaan aikaiseksi *ainoastaan* niin, että jokaisen virittäjävektorin kertoimena on nolla. Tavoitteen täyttävää virittäjäjoukkoa kutsutaan vapaaksi.

### 7.1 Vapauden määritelmä

**Määritelmä 7.1.** Oletetaan, että  $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_k \in \mathbb{R}^n$ . Vektorijono  $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_k)$  on vapaa eli *lineaarisesti riippumaton*, jos seuraava ehto pätee:

$$\text{jos } c_1\bar{v}_1 + c_2\bar{v}_2 + \dots + c_k\bar{v}_k = \bar{0} \text{ joillakin } c_1, \dots, c_k \in \mathbb{R},$$

niin  $c_1 = 0, c_2 = 0, \dots, c_k = 0$ .

Jos jono  $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_k)$  on vapaa eli lineaarisesti riippumaton, voidaan myös sanoa, että vektorit  $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_k$  ovat lineaarisesti riippumattomia toisistaan. Jos jono ei ole vapaa, sanotaan, että se on *sidottu*.

*Huom. 1.* Vektorijonolla  $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_k)$  tarkoitetaan yksinkertaisesti tiettyjen vektorien muodostamaa kokoelmaa. Sitä ei saa sekoittaa vektorimerkintään. Kyseessä ei siis ole jonkinlainen ”vektorien vektori”.

*Huom. 2.* Määritelmän ehto voidaan ilmaista muodossa ”vektorien lineaarikombinaatio on nolla vain, jos kaikki kertoimet ovat nollia”.

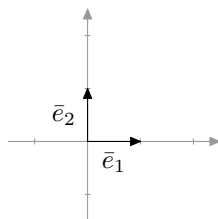
Tullaan näkemään, että jos jono  $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_k)$  on vapaa, aliavaruuden  $\text{span}(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_k)$  alkioita voidaan kirjoittaa täsmälleen yhdellä tavalla virittäjävektorien lineaarikombinaatioina. Virittäjien joukossa ei siis tällöin ole tarpeettomia vektoreita. Katsotaan ensin kuitenkin muutamia esimerkkejä.

**Esimerkki 7.2.** Merkitään  $\bar{e}_1 = (1, 0)$  ja  $\bar{e}_2 = (0, 1)$ . Osoitetaan, että avaruuden  $\mathbb{R}^2$  jono  $(\bar{e}_1, \bar{e}_2)$  on vapaa. Oletetaan, että reaalityyppiset  $c_1$  ja  $c_2$  ovat sellaisia, että

$$c_1\bar{e}_1 + c_2\bar{e}_2 = \bar{0}.$$

Nyt  $c_1(1, 0) + c_2(0, 1) = (0, 0)$ , joten  $(c_1, c_2) = (0, 0)$ . Täytyy siis päteä  $c_1 = 0$  ja  $c_2 = 0$ . Näin on osoitettu, että jono  $(\bar{e}_1, \bar{e}_2)$  on vapaa.





Kuva 7.20: Jono  $(\bar{e}_1, \bar{e}_2)$  on vapaa.

**Esimerkki 7.3.** Merkitään  $\bar{v}_1 = (1, 2)$  ja  $\bar{v}_2 = (-3, -1)$ . Tutkitaan, onko jono  $(\bar{v}_1, \bar{v}_2)$  vapaa vai sidottu.

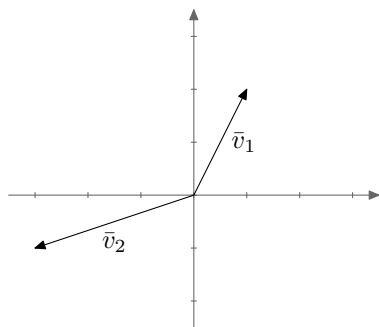
Oletetaan, että  $c_1\bar{v}_1 + c_2\bar{v}_2 = \bar{0}$  joillakin  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ . Nyt  $c_1(1, 2) + c_2(-3, -1) = (0, 0)$  eli

$$\begin{cases} c_1 - 3c_2 = 0 \\ 2c_1 - c_2 = 0. \end{cases}$$

Ratkaistaan tästä  $c_1$  ja  $c_2$ :

$$\left[ \begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{R_2 - 2R_1} \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\frac{1}{5}R_2} \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{R_1 + 3R_2} \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right].$$

Ainoa ratkaisu on  $c_1 = 0$  ja  $c_2 = 0$ . Jono  $(\bar{v}_1, \bar{v}_2)$  on siis vapaa.



Kuva 7.21: Jono  $(\bar{v}_1, \bar{v}_2)$  on vapaa.

**Esimerkki 7.4.** Kun osoitetaan jono sidotuksi, ei välttämättä tarvitse ratkaista yhtälöryhmää. Toisinaan on nimittäin helppo nähdä, minkälaisien kertoimien avulla lineaarikombinaatiosta muodostuu nollavektori.

Merkitään  $\bar{w}_1 = (2, 1)$  ja  $\bar{w}_2 = (-4, -2)$ . Huomataan, että  $2\bar{w}_1 + \bar{w}_2 = (4, 2) + (-4, -2) = \bar{0}$ . Koska vektorien  $\bar{w}_1$  ja  $\bar{w}_2$  lineaarikombinaatio on nollavektori, vaikka kertoimet eivät ole nollia, jono  $(\bar{w}_1, \bar{w}_2)$  on määritelmän nojalla sidottu.

**Esimerkki 7.5.** Merkitään  $\bar{v}_1 = (1, 2)$ ,  $\bar{v}_2 = (-3, -1)$  ja  $\bar{v}_3 = (-1, 1)$ . Tutkitaan, onko jono  $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$  vapaa vai sidottu. Oletetaan, että  $c_1\bar{v}_1 + c_2\bar{v}_2 + c_3\bar{v}_3 = \bar{0}$  joillakin  $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ . Tällöin

$$c_1(1, 2) + c_2(-3, -1) + c_3(-1, 1) = (0, 0)$$

eli komponenteittain

$$\begin{cases} c_1 - 3c_2 - c_3 = 0 \\ 2c_1 - c_2 + c_3 = 0. \end{cases}$$

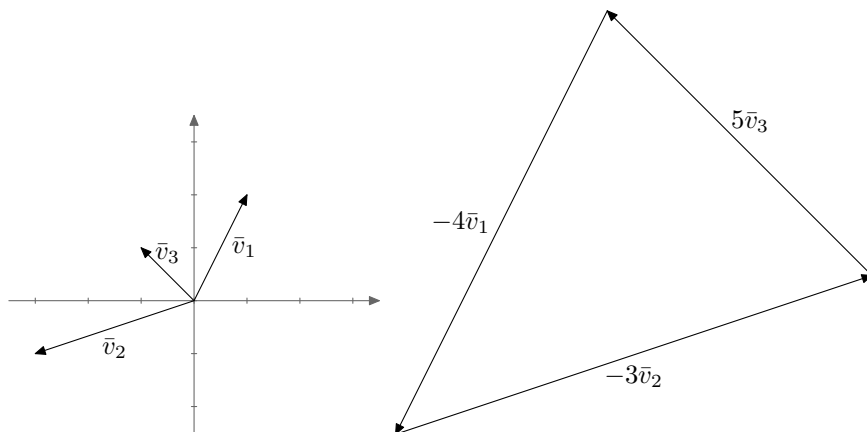
Ratkaistaan tästä  $c_1$  ja  $c_2$ :

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{R_2 - 2R_1} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\frac{1}{5}R_2} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3/5 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{R_1 + 3R_2} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4/5 & 0 \\ 0 & 1 & 3/5 & 0 \end{array} \right].$$

Huomataan, että yhtälöryhmällä on äärettömän monta ratkaisua:

$$\begin{cases} c_1 = -(4/5)t \\ c_2 = -(3/5)t \\ c_3 = t \end{cases} \quad \text{missä } t \in \mathbb{R}.$$

Näin ollen  $c_1 = 0, c_2 = 0, c_3 = 0$  ei ole ainoa ratkaisu. Voidaan valita esimerkiksi  $t = 5$ , jolloin  $c_1 = -4$  ja  $c_2 = -3$  ja  $c_3 = 5$ . Tällöin  $-4\bar{v}_1 - 3\bar{v}_2 + 5\bar{v}_3 = \bar{0}$ . Jono  $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$  on siis sidottu. Tilannetta on havainnollistettu kuvassa 7.22.



Kuva 7.22: Jono  $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$  on sidottu.

Määritelmän mukaan jonon vapaus kertoo siitä, että nollavektori voidaan kirjoittaa vain yhdellä tavalla jonon vektorien lineaarikombinaationa. Selvästikin yhtälö

$$c_1\bar{v}_1 + \cdots + c_k\bar{v}_k = \bar{0}$$

toteutuu ainakin, jos kertoimiksi  $c_1, \dots, c_k$  valitaan nollat. Toisinaan yhtälö kuitenkin toteutuu myös joillakin muilla kertoimilla. Jono on vapaa, jos yhtälö toteutuu *ainoastaan nollakertoimilla*.

Seuraava lause osoittaa, että vektori-jono  $(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k)$  on vapaa, jos ja vain jos aliavaruuden  $\text{span}(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k)$  kaikki vektorit voidaan ilmaista täsmälleen yhdellä tavalla virittäjävektorien  $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k$  lineaarikombinaatioina. Siis jos nollavektori voidaan kirjoittaa vain yhdellä tavalla virittäjävektoreiden lineaarikombinaationa, myös kaikki muut aliavaruuden  $\text{span}(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k)$  vektorit voidaan kirjoittaa vain yhdellä tavalla virittäjävektoreiden lineaarikombinaationa, ja päinvastoin. Vapaat vektori-jonot ovat kiinnostavia nimenomaan sen vuoksi, että niistä saadaan virittäjäjoukko, jossa ei ole turhia vektoreita.

**Lause 7.6.** *Oletetaan, että  $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_k \in \mathbb{R}^n$ . Jono  $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_k)$  on vapaa, jos ja vain jos jokainen aliavaruuden  $\text{span}(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_k)$  alkio voidaan kirjoittaa täsmälleen yhdellä tavalla vektorien  $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_k$  lineaarikombinaationa.*

*Todistus.* Muotoa ”jos ja vain jos” oleva väite todistetaan kahdessa osassa. Ensin oletetaan väitteen ensimmäisen osan olevan totta ja osoitetaan, että tällöin jälkimmäinen osa pätee. Tätä todistuksen vaihetta merkitään usein symbolilla ” $\Rightarrow$ ”. Sitten oletetaan jälkimmäisen osan olevan totta ja osoitetaan, että tällöin ensimmäinen osa pätee. Tätä todistuksen vaihetta merkitään symbolilla ” $\Leftarrow$ ”. Ryhdytään todistamaan väitettä.

” $\Rightarrow$ ”: Oletetaan ensin, että jono  $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_k)$  on vapaa. Osoitetaan, että jokainen aliavaruuden  $W = \text{span}(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_k)$  alkio voidaan kirjoittaa täsmälleen yhdellä tavalla virittäjävektorien  $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_k$  lineaarikombinaationa. Oletetaan, että alkio  $w \in W$  voidaan kirjoittaa lineaarikombinaationa

$$\bar{w} = a_1\bar{v}_1 + \dots + a_k\bar{v}_k \quad (3)$$

ja lineaarikombinaationa

$$\bar{w} = b_1\bar{v}_1 + \dots + b_k\bar{v}_k \quad (4)$$

joillakin  $a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_k \in \mathbb{R}$ . Nyt  $a_1\bar{v}_1 + \dots + a_k\bar{v}_k = b_1\bar{v}_1 + \dots + b_k\bar{v}_k$ , joten

$$a_1\bar{v}_1 + \dots + a_k\bar{v}_k - (b_1\bar{v}_1 + \dots + b_k\bar{v}_k) = \bar{0}.$$

Vektorien yhteenlaskun ja skalaarikertolaskun ominaisuuksien perusteella pätee

$$(a_1 - b_1)\bar{v}_1 + \dots + (a_k - b_k)\bar{v}_k = \bar{0}.$$

Jono  $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_k)$  on oletuksen nojalla vapaa, joten yllä olevasta yhtälöstä seuraa, että kaikki kertoimet ovat nollija:  $a_1 - b_1 = 0, \dots, a_k - b_k = 0$ . Siten  $a_1 = b_1, \dots, a_k = b_k$ . Näin ollen tutkitut lineaarikombinaatiot (3) ja (4) ovatkin itse asiassa samanlaiset (niissä on samat kertoimet). Siksi vektoria  $\bar{w}$  ei voida kirjoittaa usealla eri tavalla virittäjävektoreiden lineaarikombinaationa.

” $\Leftarrow$ ”: Oletetaan sitten, että jokainen aliavaruuden  $W = \text{span}(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_k)$  alkio voidaan kirjoittaa täsmälleen yhdellä tavalla virittäjävektorien  $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_k$  lineaarikombinaationa. Osoitetaan, että jono  $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_k)$  on vapaa. Sitä varten oletetaan, että luvut  $c_1, \dots, c_k \in \mathbb{R}$  ovat sellaisia, että

$$c_1\bar{v}_1 + c_2\bar{v}_2 + \dots + c_k\bar{v}_k = \bar{0}.$$

Tiedetään, että ainakin

$$0\bar{v}_1 + 0\bar{v}_2 + \cdots + 0\bar{v}_k = \bar{0}.$$

Koska nollavektori  $\bar{0}$  on aliavaruuden  $W$  alkio, se voidaan oletuksen mukaan kirjoittaa viritäjävektorien lineaarikombinaationa täsmälleen yhdellä tavalla. Siksi pätee  $c_1 = 0, \dots, c_k = 0$ . Siis jono  $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_k)$  on vapaa.  $\square$

Kahden vektorin tapauksessa lineaarinen riippumattomuus on helppo tarkistaa. Rittää tutkia, ovatko vektorit yhdensuuntaisia.

**Lause 7.7.** *Oletetaan, että  $\bar{v}, \bar{w} \in V$  ja kumpikaan vektoreista ei ole nollavektori. Tällöin  $(\bar{v}, \bar{w})$  on vapaa, jos ja vain jos vektorit  $\bar{v}$  ja  $\bar{w}$  eivät ole yhdensuuntaisia.*

*Todistus.* Todistus jätetään harjoitustehtäväksi.  $\square$

Seuraava lause osoittaa, että vektorijono on sidottu, jos ja vain jos jokin sen vektoreista voidaan ilmaista toisten lineaarikombinaationa.

**Lause 7.8.** *Oletetaan, että  $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_k \in \mathbb{R}^n$  ja  $k \geq 2$ . Jono  $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_k)$  on sidottu, jos ja vain jos*

$$\bar{v}_j \in \text{span}(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_{j-1}, \bar{v}_{j+1}, \dots, \bar{v}_k)$$

jollakin  $j \in \{1, 2, \dots, k\}$ .

*Todistus.* "⇒": Oletetaan, että jono  $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_k)$  on sidottu. On siis olemassa reaalityyppiset  $c_1, \dots, c_k$ , joilla pätee

$$c_1\bar{v}_1 + c_2\bar{v}_2 + \cdots + c_k\bar{v}_k = \bar{0},$$

ja lisäksi  $c_j \neq 0$  jollakin  $j \in \{1, 2, \dots, k\}$ . Nyt

$$c_j\bar{v}_j = -c_1\bar{v}_1 - \cdots - c_{j-1}\bar{v}_{j-1} - c_{j+1}\bar{v}_{j+1} - \cdots - c_k\bar{v}_k$$

ja edelleen

$$\bar{v}_j = -\frac{c_1}{c_j}\bar{v}_1 - \cdots - \frac{c_{j-1}}{c_j}\bar{v}_{j-1} - \frac{c_{j+1}}{c_j}\bar{v}_{j+1} - \cdots - \frac{c_k}{c_j}\bar{v}_k.$$

Siis  $\bar{v}_j \in \text{span}(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_{j-1}, \bar{v}_{j+1}, \dots, \bar{v}_k)$ .

"⇐": Oletetaan sitten, että  $\bar{v}_j \in \text{span}(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_{j-1}, \bar{v}_{j+1}, \dots, \bar{v}_k)$  jollakin  $j \in \{1, 2, \dots, k\}$ . Nyt on olemassa sellaiset  $c_1, \dots, c_{j-1}, c_{j+1}, \dots, c_k \in \mathbb{R}$ , että

$$\bar{v}_j = c_1\bar{v}_1 + \cdots + c_{j-1}\bar{v}_{j-1} + c_{j+1}\bar{v}_{j+1} + \cdots + c_k\bar{v}_k.$$

Tästä seuraa, että

$$\bar{0} = c_1\bar{v}_1 + \cdots + c_{j-1}\bar{v}_{j-1} + (-1)\bar{v}_j + c_{j+1}\bar{v}_{j+1} + \cdots + c_k\bar{v}_k.$$

Koska kerroin  $-1$  ei ole nolla, on jono  $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_k)$  sidottu.  $\square$



**Korollaari 7.12.** Oletetaan, että  $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n \in \mathbb{R}^m$ , missä  $n \in \{1, 2, \dots\}$ . Jos  $n > m$ , niin jono  $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n)$  on sidottu.

*Huom.* Korollaari on lause joka seuraa suoraan tai lähes suoraan toisesta lauseesta. Tämä korollaari on lauseen 7.11 seuraus.

*Todistus.* Merkitään  $\bar{v}_k = (v_{1k}, v_{2k}, \dots, v_{mk})$  kaikilla  $k \in \{1, \dots, n\}$ . Nyt yhtälöä

$$x_1 \bar{v}_1 + x_2 \bar{v}_2 + \dots + x_n \bar{v}_n = \bar{0}$$

vastaavaksi yhtälöryhmäksi saadaan

$$\begin{cases} v_{11}x_1 + v_{12}x_2 + \dots + v_{1n}x_n = 0 \\ v_{21}x_1 + v_{22}x_2 + \dots + v_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ v_{m1}x_1 + v_{m2}x_2 + \dots + v_{mn}x_n = 0. \end{cases}$$

Tässä homogeenisessa yhtälöryhmässä on enemmän tuntemattomia kuin yhtälöitä. Siten yhtälöryhmällä on äärettömän monta ratkaisua. Koska löytyy muitakin ratkaisuja kuin triviaaliratkaisu, ei jono  $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n)$  ole vapaa.  $\square$

Jos homogeenisessa yhtälöryhmässä tuntemattomien määrä  $n$  on pienempi tai yhtä suuri kuin yhtälöiden määrä  $m$ , ei ratkaisujen määrästä voi äkkiseltään sanoa mitään varmaa. Ratkaisuja voi olla täsmälleen yksi (triviaali ratkaisu) tai äärettömän monta. Jos siis avaruuden  $\mathbb{R}^n$  jonon  $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_m)$  pituus  $m$  on *pienempi* kuin  $n$ , ei jonon lineaarisesta riippumattomuudesta voida sanoa sen perusteella mitään.

## 8 Kanta

Tässä luvussa tarkastellaan aliavaruuden virittäjävektoreita, jotka muodostavat lineaarisesti riippumattoman jonon. Merkintöjen helpottamiseksi oletetaan luvussa koko ajan, että  $W$  on vektoreiden  $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_m \in \mathbb{R}^n$  virittämä avaruuden  $\mathbb{R}^n$  aliavaruus eli

$$W = \text{span}(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_m).$$

**Määritelmä 8.1.** Olkoot  $\bar{w}_1, \bar{w}_2, \dots, \bar{w}_k \in W$ . Vektorijono  $(\bar{w}_1, \bar{w}_2, \dots, \bar{w}_k)$  on aliavaruuden  $W$  *kanta*, jos seuraavat ehdot pätevät:

- a)  $W = \text{span}(\bar{w}_1, \bar{w}_2, \dots, \bar{w}_k)$
- b) jono  $(\bar{w}_1, \bar{w}_2, \dots, \bar{w}_k)$  on vapaa.

**Esimerkki 8.2.** Esimerkissä 6.3 osoitettiin, että vektorit  $\bar{e}_1 = (1, 0)$  ja  $\bar{e}_2 = (0, 1)$  virittävät avaruuden  $\mathbb{R}^2$ . Jono  $(\bar{e}_1, \bar{e}_2)$  on lisäksi vapaa esimerkin 7.2 perusteella. Siten  $(\bar{e}_1, \bar{e}_2)$  on avaruuden  $\mathbb{R}^2$  kanta.

Vastaavasti avaruudella  $\mathbb{R}^n$  on kanta

$$(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n).$$

Tässä  $\bar{e}_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ , missä luku 1 on vektorin  $i$ :s komponentti. Kantaa kutsutaan avaruuden  $\mathbb{R}^n$  *luonnolliseksi kannaksi*. Lukijan tehtäväksi jätetään osoittaa, että kyseessä on todellakin kanta.

Kannan vektorit siis virittävät aliavaruuden, ja lisäksi kanta on vapaa. Lauseesta 7.6 saadaan seuraava hyvin käyttökelpoinen tulos:

**Lause 8.3.** Oletetaan, että  $\bar{w}_1, \bar{w}_2, \dots, \bar{w}_k \in W$ . Jono  $(\bar{w}_1, \bar{w}_2, \dots, \bar{w}_k)$  on aliavaruuden  $W$  kanta, jos ja vain jos jokainen aliavaruuden  $W$  vektori voidaan kirjoittaa täsmälleen yhdellä tavalla vektoreiden  $\bar{w}_1, \bar{w}_2, \dots, \bar{w}_k$  lineaarikombinaationa.

*Todistus.* ” $\Rightarrow$ ”: Oletetaan, että jono  $(\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_k)$  on aliavaruuden  $W$  kanta. Tällöin kannan määritelmän nojalla  $W = \text{span}(\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_k)$  ja jono  $(\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_k)$  on vapaa. Lauseesta 7.6 seuraa, että jokainen aliavaruuden  $W = \text{span}(\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_k)$  vektori voidaan kirjoittaa tasan yhdellä tavalla vektoreiden  $\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_k$  lineaarikombinaationa.

” $\Leftarrow$ ”: Oletetaan, että jokainen aliavaruuden  $W$  vektori voidaan kirjoittaa täsmälleen yhdellä tavalla vektoreiden  $\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_k$  lineaarikombinaationa. Tästä seuraa, että  $W = \text{span}(\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_k)$ . Lisäksi lauseen 7.6 mukaan jono  $(\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_k)$  on vapaa. Näin kannan määritelmän molemmat ehdot täyttyvät. Siis  $(\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_k)$  on aliavaruuden  $W$  kanta.  $\square$

**Esimerkki 8.4.** Merkitään  $\bar{w}_1 = (2, -1)$ ,  $\bar{w}_2 = (1, 3)$ . Osoitetaan lauseen 8.3 avulla, että  $(\bar{w}_1, \bar{w}_2)$  on avaruuden  $\mathbb{R}^2$  kanta. Oletetaan, että  $\bar{v} \in \mathbb{R}^2$ . Ratkaistaan yhtälö  $x_1\bar{w}_1 + x_2\bar{w}_2 = \bar{v}$  eli yhtälö  $x_1(2, -1) + x_2(1, 3) = (v_1, v_2)$ . Sitä vastaa yhtälöryhmä

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = v_1 \\ -x_1 + 3x_2 = v_2. \end{cases}$$

Kun yhtälöryhmän matriisia muokataan alkeisrivitoimituksilla, saadaan matriisi

$$\left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{1}{7}(3v_1 - v_2) \\ 0 & 1 & \frac{1}{7}(v_1 + 2v_2) \end{array} \right].$$

Matriisista nähdään, että yhtälöryhmällä on täsmälleen yksi ratkaisu riippumatta vektorista  $\bar{v} \in \mathbb{R}^2$ . Siis jono  $(\bar{w}_1, \bar{w}_2)$  on avaruuden  $\mathbb{R}^2$  kanta.

## 8.1 Koordinaatit

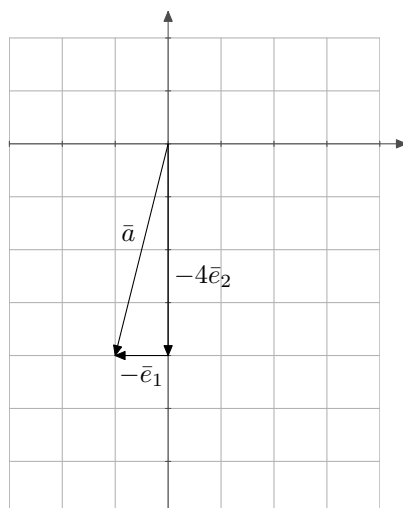
Kun aliavaruuden vektori kirjoitetaan kannan vektorien lineaarikombinaationa, kertoimia kutsutaan vektorin koordinaateiksi.

**Määritelmä 8.5.** Oletetaan, että  $\mathcal{B} = (\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_k)$  on aliavaruuden  $W$  kanta. Oletetaan, että  $\bar{u} \in W$ . Vektorin  $\bar{u}$  koordinaateiksi kannan  $\mathcal{B}$  suhteen kutsutaan reaalilukuja  $b_1, \dots, b_k$ , joilla

$$\bar{u} = b_1\bar{w}_1 + \dots + b_k\bar{w}_k.$$

*Huom.* Vektorin koordinaatit jonkin tietyn kannan suhteen ovat yksikäsitteiset, sillä vektori voidaan lauseen 8.3 mukaan kirjoittaa vain yhdellä tavalla kannan alkioiden lineaarikombinaationa. Vektorilla on siis kunkin tietyn kannan suhteen vain yhdet koordinaatit. Eri kantojen suhteen saman vektorin koordinaatit voivat tietenkin olla erilaisia.

**Esimerkki 8.6.** Luonnollisen kannan suhteen koordinaatit on helppo määrittää. Esimerkiksi vektorin  $\bar{a} = (-1, -4)$  koordinaatit avaruuden  $\mathbb{R}^2$  luonnollisen kannan  $\mathcal{E}_2 = (\bar{e}_1, \bar{e}_2)$  suhteen ovat  $-1$  ja  $-4$ , sillä  $\bar{a} = (-1, -4) = (-1)(1, 0) + (-4)(0, 1) = (-1)\bar{e}_1 + (-4)\bar{e}_2$ .



Kuva 8.23: Vektorin  $\bar{a}$  koordinaatit kannan  $\mathcal{E}_2 = (\bar{e}_1, \bar{e}_2)$  suhteen ovat  $-1$  ja  $-4$ .

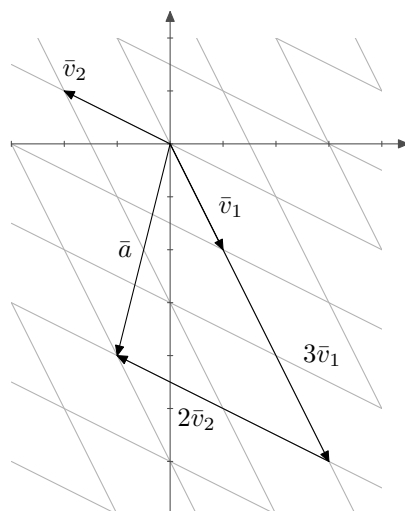


Tutkitaan sitten erästä toista avaruuden  $\mathbb{R}^2$  kantaa. Merkitään  $\bar{v}_1 = (1, -2)$ ,  $\bar{v}_2 = (-2, 1)$ . Nyt  $\mathcal{B} = (\bar{v}_1, \bar{v}_2)$  on avaruuden  $\mathbb{R}^2$  kanta, minkä osoittaminen jätetään lukijalle. Määritetään vektorin  $\bar{a} = (-1, -4)$  koordinaatit kannan  $\mathcal{B}$  suhteen. On ratkaistava yhtälö  $\bar{a} = x_1\bar{v}_1 + x_2\bar{v}_2$  eli yhtälö

$$(-1, -4) = x_1(1, -2) + x_2(-2, 1).$$

Tästä yhtälöstä saadaan tuttuun tapaan yhtälöryhmä, jonka ratkaisuksi paljastuu  $x_1 = 3$ ,  $x_2 = 2$ . Näin ollen  $\bar{a} = 3\bar{v}_1 + 2\bar{v}_2$  eli vektorin  $\bar{a}$  koordinaatit kannan  $\mathcal{B}$  suhteen ovat 3 ja 2.

Vektorin  $\bar{a} = (-1, -4)$  koordinaatteja kannan  $\mathcal{B} = (\bar{v}_1, \bar{v}_2)$  suhteen on havainnollistettu kuvassa 8.24. Jotta päästään pisteeseen  $(-1, -4)$  on mentävä 3 ruutua vektorin  $\bar{v}_1$  suuntaan ja 2 ruutua vektorin  $\bar{v}_2$  suuntaan. Siten vektorin  $\bar{a} = (-1, -4)$  koordinaatit kannan  $\mathcal{B}$  suhteen ovat 3 ja 2.



Kuva 8.24: Vektori  $\bar{a} = (-1, -4)$  ilmaistuna kannan  $\mathcal{B} = (\bar{v}_1, \bar{v}_2)$  vektoreiden lineaarikombinaationa. Vektorin koordinaatit kannan  $\mathcal{B}$  suhteen ovat 3 ja 2.

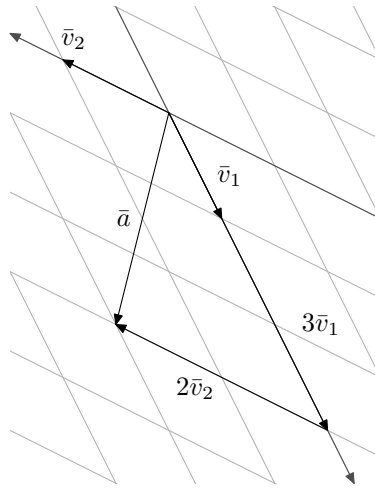
Kun käytetään jotakin muuta kuin luonnollista kantaa, vääntyy koordinaatisto ikään kuin vinoon. Kuvassa 8.25 luonnollisen kannan koordinaattiakselit on häivytetty pois ja niiden sijasta näkyvissä ovat kantavektoreiden  $\bar{v}_1$  ja  $\bar{v}_2$  muodostamat koordinaattiakselit.

## 8.2 Dimensio

Lukijalla on todennäköisesti jonkinlainen kuva siitä, mitä dimensiolla tarkoitetaan. Avaruus  $\mathbb{R}^3$  on kolmiulotteinen eli sen dimensio on kolme. Avaruuden  $\mathbb{R}^2$  dimensio on kaksi samoin kuin kaikkien niiden avaruuden  $\mathbb{R}^3$  tasojen, jotka ovat aliavaruuksia. Avaruuden  $\mathbb{R}$  sekä suorien dimensio on puolestaan yksi. Dimensio määritellään täsmällisesti kannan avulla: avaruuden dimensio on sen kantavektoreiden lukumäärä.

Ennen dimension määrittämistä tarvitaan eräs kantoja koskeva lause.

**Lause 8.7.** *Aliavaruuden  $W$  jokaisessa kannassa on yhtä monta vektoria.*



Kuva 8.25: Vektori  $\bar{a} = (-1, -4)$  ilmaistuna kannan  $\mathcal{B} = (\bar{v}_1, \bar{v}_2)$  vektoreiden lineaarikombinaationa. Kun käytetään jotakin muuta kuin luonnollista kantaa, vääntyy koordinaatisto vinoon.

*Todistus.* Oletetaan, että  $\mathcal{B} = (\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_j)$  ja  $\mathcal{C} = (\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_k)$  ovat molemmat aliavaruuden  $W$  kantoja. Pyritään osoittamaan, että  $j = k$ . Tehdään se osoittamalla, että muut vaihtoehdot  $j < k$  ja  $k < j$  johtavat ristiriitaan.

Oletetaan, että  $j < k$ . Tarkastellaan yhtälöä

$$x_1 \bar{w}_1 + \dots + x_k \bar{w}_k = \bar{0}. \quad (5)$$

Koska  $\mathcal{B}$  on aliavaruuden  $W$  kanta, voidaan kaikki kannan  $\mathcal{C}$  vektorit kirjoittaa kannan  $\mathcal{B}$  vektorien lineaarikombinaatioina:

$$\begin{aligned} \bar{w}_1 &= a_{11} \bar{v}_1 + a_{12} \bar{v}_2 + \dots + a_{1j} \bar{v}_j \\ \bar{w}_2 &= a_{21} \bar{v}_1 + a_{22} \bar{v}_2 + \dots + a_{2j} \bar{v}_j \\ &\vdots \\ \bar{w}_k &= a_{k1} \bar{v}_1 + a_{k2} \bar{v}_2 + \dots + a_{kj} \bar{v}_j \end{aligned}$$

joillakin  $a_{11}, \dots, a_{kj} \in \mathbb{R}$ . Sijoittamalla nämä yhtälöön (5) muodostuu yhtäpitävä yhtälö:

$$\begin{aligned} &x_1(a_{11} \bar{v}_1 + a_{12} \bar{v}_2 + \dots + a_{1j} \bar{v}_j) \\ &\quad + x_2(a_{21} \bar{v}_1 + a_{22} \bar{v}_2 + \dots + a_{2j} \bar{v}_j) \\ &\quad \quad \quad + \dots \\ &\quad \quad \quad + x_k(a_{k1} \bar{v}_1 + a_{k2} \bar{v}_2 + \dots + a_{kj} \bar{v}_j) = \bar{0}, \end{aligned}$$

josta saadaan edelleen ryhmittelemällä

$$\begin{aligned} & (x_1 a_{11} + x_2 a_{21} + \cdots + x_k a_{k1}) \bar{v}_1 \\ & \quad + (x_1 a_{12} + x_2 a_{22} + \cdots + x_k a_{k2}) \bar{v}_2 \\ & \quad + \cdots \\ & \quad + (x_1 a_{1j} + x_2 a_{2j} + \cdots + x_k a_{kj}) \bar{v}_j = \bar{0}. \end{aligned}$$

Jono  $\mathcal{B} = (\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_j)$  on kanta, joten se on vapaa. Siten edellinen yhtälö toteutuu, jos ja vain jos kaikki kertoimet ovat nollia:

$$\begin{cases} x_1 a_{11} + x_2 a_{21} + \cdots + x_k a_{k1} & = & 0 \\ x_1 a_{12} + x_2 a_{22} + \cdots + x_k a_{k2} & = & 0 \\ & \vdots & \vdots \\ x_1 a_{1j} + x_2 a_{2j} + \cdots + x_k a_{kj} & = & 0 \end{cases}$$

Kyseessä on homogeeninen yhtälöryhmä, jossa tuntemattomien määrä  $k$  on suurempi kuin yhtälöiden määrä  $j$ . Lauseen 7.11 mukaan yhtälöryhmällä on muitakin ratkaisuja kuin  $x_1 = 0, \dots, x_k = 0$ . Siis jono  $\mathcal{C} = (\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_k)$  on sidottu. Tämä on ristiriita, sillä  $\mathcal{C}$  on aliavaruuden  $W$  kanta.

Tapaus  $j > k$  käsitellään vastaavasti. Tällöinkin päädytään ristiriitaan. Täytyy siis päteä  $j = k$ .  $\square$

Voidaan osoittaa, että jokaisella avaruuden  $\mathbb{R}^n$  aliavaruudella on kanta. (Tämä todistetaan kurssin toisessa osassa.) Lisäksi edellä nähtiin, että jokaisessa kannassa on yhtä monta vektoria. Kantavektorien lukumäärää kutsutaan avaruuden dimensioksi.

**Määritelmä 8.8.** Aliavaruuden  $W$  *dimensio*  $\dim(W)$  on aliavaruuden  $W$  kannan vektoreiden lukumäärä. Jos aliavaruuden dimensio on  $n$ , sanotaan, että aliavaruus on  *$n$ -ulotteinen*.

**Esimerkki 8.9.** Avaruuden  $\mathbb{R}^2$  dimensio on 2, sillä avaruudella on kanta  $(\bar{e}_1, \bar{e}_2)$ . Vastaavasti avaruuden  $\mathbb{R}^n$  dimensio on  $n$ , sillä avaruuden luonnollisen kannan vektorien lukumäärä on  $n$ .

**Esimerkki 8.10.** Määritetään avaruuden  $\mathbb{R}^3$  aliavaruuden  $W = \text{span}((1, 3, -1), (0, 2, 1))$  dimensio. Vektorit  $(1, 3, -1)$  ja  $(0, 2, 1)$  virittävät avaruuden  $W$ . Lisäksi nämä kaksi vektoria ovat lineaarisesti riippumattomia, sillä ne eivät ole yhdensuuntaisia (ks. lause 7.7). Siten vektorit  $(1, 3, -1)$  ja  $(0, 2, 1)$  muodostavat aliavaruuden  $W$  kannan. Koska kannassa on kaksi vektoria, aliavaruuden dimensio on kaksi.

Huomaa, että aliavaruus  $W$  on taso.

**Esimerkki 8.11.** Määritetään avaruuden  $\mathbb{R}^3$  aliavaruuden

$$W = \text{span}((1, 3, -1), (-3, -9, 3))$$

dimensio. Vektorit  $(1, 3, -1)$  ja  $(-3, -9, 3)$  kylläkin virittävät avaruuden  $W$ , mutta ne eivät muodosta aliavaruuden kantaa. Huomataan nimittäin, että  $3(1, 3, -1) = (-3, -9, 3)$ , joten vektorit ovat yhdensuuntaisia ja siksi ne eivät lauseen 7.7 mukaan ole lineaarisesti riippumattomia kuten kantavektorien pitäisi olla.

Vaikuttaa siltä, että  $W$  on vektorin  $(1, 3, -1)$  virittämä aliavaruus eli suora. Osoitetaan tämä täsmällisesti. Ensinnäkin

$$\begin{aligned} W &= \text{span}((1, 3, -1), (-3, -9, 3)) = \{a(1, 3, -1) + b(-3, -9, 3) \mid a, b \in \mathbb{R}\} \\ &= \{a(1, 3, -1) - 3b(1, 3, -1) \mid a, b \in \mathbb{R}\} = \{(a - 3b)(1, 3, -1) \mid a, b \in \mathbb{R}\} \\ &\subset \{c(1, 3, -1) \mid c \in \mathbb{R}\} = \text{span}((1, 3, -1)). \end{aligned}$$

Toisaalta

$$\begin{aligned} \text{span}((1, 3, -1)) &= \{a(1, 3, -1) \mid a \in \mathbb{R}\} = \{a(1, 3, -1) + 0(-3, -9, 3) \mid a \in \mathbb{R}\} \\ &\subset \text{span}((1, 3, -1), (-3, -9, 3)) = W. \end{aligned}$$

Siis  $W = \text{span}((1, 3, -1))$ .

Näin ollen aliavaruuden  $W$  kannan muodostaa vektori  $(1, 3, -1)$ , joten  $\dim(W) = 1$ .

**Esimerkki 8.12.** Merkitään  $\bar{v}_1 = (3, -1, 5)$ ,  $\bar{v}_2 = (2, 1, 3)$  ja  $\bar{v}_3 = (0, -5, 1)$ . Määritetään aliavaruuden  $W = \text{span}(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$  dimensio.

Oletetaan, että  $\bar{u} \in \mathbb{R}^3$ . Selvitetään, mikä ehto vektorin  $\bar{u}$  komponenttien pitää toteuttaa, jotta  $\bar{u}$  on aliavaruudessa  $W$ . Ratkaistaan yhtälö  $x_1\bar{v}_1 + x_2\bar{v}_2 + x_3\bar{v}_3 = \bar{u}$  eli yhtälö

$$x_1(3, -1, 5) + x_2(2, 1, 3) + x_3(0, -5, 1) = (u_1, u_2, u_3).$$

Sitä vastaa yhtälöryhmä

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 &= u_1 \\ -x_1 + x_2 - 5x_3 &= u_2 \\ 5x_1 + 3x_2 + x_3 &= u_3 \end{cases}$$

Yhtälöryhmän matriisi on

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 0 & u_1 \\ -1 & 1 & -5 & u_2 \\ 5 & 3 & 1 & u_3 \end{array} \right],$$

ja se saadaan alkeisrivitoimituksilla muutettua matriisiksi

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 5 & -u_2 \\ 0 & 1 & -3 & \frac{1}{5}(u_1 + 3u_2) \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5}(5u_3 + u_2 - 8u_1) \end{array} \right].$$

Yhtälöryhmällä ratkaisu, jos ja vain jos matriisin alinta riviä vastaava yhtälö

$$0 = \frac{1}{5}(5u_3 + u_2 - 8u_1)$$

on tosi eli  $5u_3 + u_2 - 8u_1 = 0$ . Siten

$$\begin{aligned}
 W &= \text{span}(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3) \\
 &= \{(u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3 \mid 5u_3 + u_2 - 8u_1 = 0\} \\
 &= \{(u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3 \mid u_2 = 8u_1 - 5u_3\} \\
 &= \{(u_1, 8u_1 - 5u_3, u_3) \mid u_1, u_3 \in \mathbb{R}\} \\
 &= \{(u_1, 8u_1, 0) + (0, -5u_3, u_3) \mid u_1, u_3 \in \mathbb{R}\} \\
 &= \{u_1(1, 8, 0) + u_3(0, -5, 1) \mid u_1, u_3 \in \mathbb{R}\} \\
 &= \text{span}((1, 8, 0), (0, -5, 1)).
 \end{aligned}$$

Nyt tiedetään, että vektorit  $(1, 8, 0)$  ja  $(0, -5, 1)$  virittävät aliavaruuden. Lisäksi nämä kaksi vektoria ovat lineaarisesti riippumattomia, sillä ne eivät ole yhdensuuntaisia. Siispä jono  $((1, 8, 0), (0, -5, 1))$  on avaruuden  $W$  kanta, ja  $\dim(W) = 2$ .

**Esimerkki 8.13.** Edellisen esimerkin aliavaruudelle  $W$  voidaan löytää kanta myös toisella menetelmällä. Oletetaan nyt, että  $\bar{w} = (w_1, w_2, w_3) \in W$ . Tällöin yhtälö

$$x_1(3, -1, 5) + x_2(2, 1, 3) + x_3(0, -5, 1) = (w_1, w_2, w_3) \quad (6)$$

pätee joillakin kertoimilla  $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ . Samalla tavalla kuin edellisessä esimerkissä yhtälöä vastaa matriisi

$$\left[ \begin{array}{ccc|c}
 3 & 2 & 0 & w_1 \\
 -1 & 1 & -5 & w_2 \\
 5 & 3 & 1 & w_3
 \end{array} \right].$$

Koska olemme olettaneet, että vektori  $\bar{w}$  kuuluu aliavaruuteen  $W$ , tiedämme, että yhtälöstä (6) saatavalla yhtälöryhmällä on varmasti ainakin yksi ratkaisu. Tämän vuoksi on samantekevää, mitä porrasmatriisiin tulee pystyviivan oikealle puolelle, ja voimme kiinnittää huomion yhtälön kertoimiin. Nämä näyttävät porrasmatriisissa seuraavilta:

$$\left[ \begin{array}{ccc}
 1 & -1 & 5 \\
 0 & 1 & -3 \\
 0 & 0 & 0
 \end{array} \right].$$

Porrasmatriisista huomataan, että kolmannessa sarakkeessa ei ole johtavaa alkioita. Muuttujan  $x_3$  arvo voidaan siis valita vapaasti, ja valinta määrää muuttujien  $x_1$  ja  $x_2$  arvot. Siispä yhtälössä (6) voi kerroin  $x_3$  saada minkä tahansa arvon, esimerkiksi arvon 0. Jokainen vektori  $\bar{w} \in W$  voidaan täten ilmaista pelkästään vektorien  $\bar{v}_1 = (3, -1, 5)$  ja  $\bar{v}_2 = (2, 1, 3)$  lineaarikombinaationa. Koska nämä vektorit eivät ole yhdensuuntaisia, ne ovat lineaarisesti riippumattomat. Siten  $(\bar{v}_1, \bar{v}_2)$  on aliavaruuden  $W$  kanta. Tämä kanta on eri kuin edellisessä esimerkissä saatu, mutta siinä on yhtä monta vektoria. Aliavaruuden  $W$  dimensio on siis 2.

## 9 Matriisit

Aiemmissa luvuissa matriiseja on käsitelty siinä määrin kuin on ollut tarpeellista yhtälönratkaisun kannalta. Matriiseja käytetään kuitenkin myös muihin tarkoituksiin, ja siksi on hyödyllistä selvittää, minkälaisia ominaisuuksia matriiseilla itsellään on. Samalla saadaan joitakin uusia tapoja myös yhtälöryhmien ratkaisujen tutkimiseen.

Reaalialkioinen  $m \times n$  -matriisi on reaaliulukutaulukko, jossa on  $m$  riviä ja  $n$  saraketta. Esimerkiksi

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

on  $m \times n$  -matriisi. Voidaan myös sanoa, että matriisin  $A$  tyyppi on  $m \times n$ . Kaikkien reaali-kertoimisten  $m \times n$  -matriisien joukkoa merkitään  $\mathbb{R}^{m \times n}$ . Matriisissa olevia lukuja kutsutaan matriisin alkioiksi, ja rivillä  $i$  sarakkeessa  $j$  olevaa alkioita merkitään  $A(i, j)$ . Esimerkiksi

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ -3 & 11 & 2 \\ 4 & 0 & 2 \\ 0 & \sqrt{2} & -6 \end{bmatrix}$$

on reaalikertoiminen  $4 \times 3$  -matriisi eli  $B \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ . Nähdään, että  $B(1, 3) = 5$  ja  $B(2, 2) = 11$ .

### 9.1 Matriisien laskutoimituksia

Matriiseille, kuten vektoreillekin, voidaan määritellä erilaisia laskutoimituksia. Osa niistä muistuttaa läheisesti vektorien vastaavia laskutoimituksia.

#### Matriisien yhteenlasku

Matriisien yhteenlasku määritellään seuraavasti. Olkoot  $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ . Matriisien  $A$  ja  $B$  summa saadaan laskemalla yhteen samoissa kohdissa olevat alkiot. Tuloksena on  $m \times n$  -matriisi  $A + B$ , jolle pätee

$$(A + B)(i, j) = A(i, j) + B(i, j)$$

kaikilla  $i \in \{1, \dots, m\}$  ja  $j \in \{1, \dots, n\}$ . Esimerkiksi

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+2 & 2+(-1) \\ 3+0 & 4+1 \\ 5+3 & 6+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 5 \\ 8 & 8 \end{bmatrix}.$$

*Huom.* Vain matriiseja, joilla on sama tyyppi, voidaan laskea yhteen.

## Skalaarikertolasku

Minkä tahansa matriisin  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  voi kertoa reaalityyppisellä luvulla  $c$ , ja tätä toimitusta kutsutaan *skalaarikertolaskuksi*. Saatava tulos on  $m \times n$ -matriisi  $cA$ , jota nimitetään matriisin  $A$  *skalaarimonikerraksi* ja jolle pätee

$$(cA)(i, j) = c \cdot A(i, j)$$

kaikilla  $i \in \{1, \dots, m\}$  ja  $j \in \{1, \dots, n\}$ . Esimerkiksi

$$2 \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 2 & 2 \cdot (-1) \\ 2 \cdot 0 & 2 \cdot 1 \\ 2 \cdot 3 & 2 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 2 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}.$$

Matriisia  $(-1)A$  on tapana merkitä  $-A$ . Matriisisummaa  $A + (-B)$  merkitään  $A - B$  ja sitä kutsutaan matriisien  $A$  ja  $B$  *erotukseksi*.

## Matriisikertolasku

Matriiseille voidaan määritellä myös *matriisikertolasku*. Tämä laskutoimitus on hieman monimutkaisempi kuin edellä määritellyt eikä mitään vastaavaa ole olemassa vektoreille.

Kaksi matriisia voidaan kertoa keskenään vain, jos ensimmäisessä on yhtä paljon sarakkeita kuin toisessa on rivejä. Olkoot siis  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  ja  $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$ . Tällöin tulo  $AB$  on  $m \times p$ -matriisi, jolle pätee

$$\begin{aligned} (AB)(i, j) &= A(i, 1)B(1, j) + A(i, 2)B(2, j) + \dots + A(i, n)B(n, j) \\ &= \sum_{k=1}^n A(i, k)B(k, j) \end{aligned}$$

kaikilla  $i \in \{1, \dots, m\}$  ja  $j \in \{1, \dots, p\}$ .<sup>1</sup>

**Esimerkki 9.1.** Lasketaan matriisien

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

tulo. Koska matriisissa  $A$  on kolme saraketta (tyyppi  $2 \times 3$ ) ja matriisissa  $B$  on vastaavasti kolme riviä (tyyppi  $3 \times 2$ ), matriisit voidaan kertoa keskenään. Tulomatriisi on tyyppiä  $2 \times 2$ .

---

<sup>1</sup>Merkintä  $\sum_{k=1}^n c_k$  tarkoittaa summaa  $c_1 + c_2 + \dots + c_n$ .

Määritelmän mukaan

$$\begin{aligned} AB &= \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 + (-1) \cdot (-2) + 0 \cdot 0 & 2 \cdot 2 + (-1) \cdot (-1) + 0 \cdot 1 \\ 1 \cdot 1 + 3 \cdot (-2) + 2 \cdot 0 & 1 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

**Esimerkki 9.2.** Matriisikertolasku ei ole vaihdannainen operaatio eli tulon tekijöiden järjestyksestä ei voi vaihtaa. Tarkastellaan vaikkapa matriiseja

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Laskemalla tulo molemmin päin huomataan, että

$$AB = \begin{bmatrix} -4 & 7 \\ -8 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{mutta} \quad BA = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -7 & -2 \end{bmatrix}.$$

Siten  $AB \neq BA$ .

Oletetaan, että  $A$  on  $n \times n$ -matriisi ja  $k \in \{1, 2, \dots\}$ . Tällöin voidaan matriisitulon avulla määritellä *matriisipotenssi*

$$A^k = \underbrace{AA \cdots A}_{k \text{ kpl}}.$$

## 9.2 Erityisiä matriiseja

Matriiseja, joiden kaikki alkiot ovat nollia, eli jotka ovat muotoa

$$O_{m \times n} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n},$$

kutsutaan *nollamatriiseiksi*. *Ykkösmatriiseja* puolestaan ovat matriisit

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

Ykkösmatriiseja kutsutaan usein myös *yksikkömatriiseiksi*.



*Huom. 1.* Nollamatriisi voi olla mitä tahansa tyyppiä. Sen sijaan yksikkömatriisissa on aina yhtä paljon rivejä ja sarakkeita.

*Huom. 2.* Jos matriisien tyypeistä ei ole epäselvyyttä, saatetaan merkitä yksinkertaisemmin  $O_{m \times n} = O$  ja  $I_n = I$ .

Ei ole vaikea nähdä, että nollamatriisit käyttäytyvät matriisien yhteenlaskun suhteen samalla tavalla kuin nolla lukujen yhteenlaskussa (tai nollavektori vektorien yhteenlaskussa): sellaisen lisääminen toiseen samantyyppiseen matriisiin ei muuta tuota toista matriisia mitenkään. Samalla tavoin ykkösmatriisit käyttäytyvät matriisikertolaskussa aivan kuten reaaliluku 1 tavallisessa kertolaskussa. Kaikilla  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  pätee nimittäin

$$I_m A = A \quad \text{ja} \quad A I_n = A.$$

Eri puolilta kerrottaessa on matriisikertolaskun rajoituksen vuoksi käytettävä eri kokoista ykkösmatriisia.

*Neliömatriisi* on matriisi, jossa on yhtä monta riviä ja saraketta. Esimerkiksi ykkösmatriisit ovat neliömatriiseja.

Neliömatriisin alkio on *lävistäjällä* eli *diagonaalilla*, jos alkion rivin ja sarakkeen numerot ovat samat. Matriisi, jonka kaikki nollassa poikkeavat alkioit ovat lävistäjällä, on *lävistäjämatriisi*. Lävistäjämatrisi, jonka kaikki lävistäjäalkiot ovat samoja, on puolestaan *skalaarimatriisi*. Skalaarimatriisit ovat ykkösmatriisin skalaarimonikertoja. Esimerkiksi

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 15 \end{bmatrix}$$

on lävistäjämatriisi ja

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = 2I_3$$

on skalaarimatriisi.

### 9.3 Matriisien laskusääntöjä

Matriisien laskutoimitukset noudattavat tiettyjä sääntöjä, jotka monessa kohdassa muistuttavat lukujen laskusääntöjä.

**Lause 9.3.** *Seuraavat säännöt pätevät matriiseille  $A$ ,  $B$  ja  $C$  sekä reaaliluvuille  $a$  ja  $b$ , jos laskutoimitukset on määritelty:*

- a)  $A + B = B + A$
- b)  $A + (B + C) = (A + B) + C$
- c)  $A(BC) = (AB)C$
- d)  $A(B + C) = AB + AC$

- e)  $(A + B)C = AC + BC$   
 f)  $(ab)A = a(bA)$   
 g)  $a(AB) = (aA)B = A(aB)$ .

*Huom.* Kuten aiemmin on jo mainittu, yleisessä tapauksessa  $AB \neq BA$ , eli tulon vaihdannaisuus ei päde matriiseilla. Myöskään tulon nollasääntö ei päde matriiseilla: kahden matriisin tulo voi olla nollamatriisi, vaikka kumpikaan tulon tekijöistä ei ole nollamatriisi.

*Todistus.* Osoitetaan esimerkin vuoksi kohta d). Muiden kohtien tarkistaminen jätetään lukijalle.

Oletetaan, että  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  ja  $B, C \in \mathbb{R}^{n \times p}$ . Nyt  $A(B + C)$  ja  $AB + AC$  ovat molemmat  $m \times p$ -matriiseja. On osoitettava, että kyseisten matriisien alkiot ovat samoja. Olkoot sitä varten  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$  ja  $j \in \{1, 2, \dots, p\}$ . Nähdään, että

$$\begin{aligned}
 (A(B + C))(i, j) &= \sum_{k=1}^n A(i, k) \cdot (B + C)(k, j) \\
 &= \sum_{k=1}^n A(i, k)(B(k, j) + C(k, j)) \\
 &= \sum_{k=1}^n (A(i, k)B(k, j) + A(i, k)C(k, j)) \\
 &= \sum_{k=1}^n A(i, k)B(k, j) + \sum_{k=1}^n A(i, k)C(k, j) \\
 &= (AB)(i, j) + (AC)(i, j) \\
 &= (AB + AC)(i, j).
 \end{aligned}$$

Koska matriisit  $A(B + C)$  ja  $AB + AC$  ovat samaa tyyppiä ja niillä on täsmälleen samat alkiot, pätee  $A(B + C) = AB + AC$ . □

## 9.4 Matriisin transpoosi

**Määritelmä 9.4.** Oletetaan, että  $A$  on  $m \times n$ -matriisi. Sen *transpoosi*  $A^\top$  on  $n \times m$ -matriisi, joka saadaan vaihtamalla matriisin  $A$  rivit ja sarakkeet keskenään.

Esimerkiksi matriisin

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

transpoosi on

$$A^\top = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

**Määritelmä 9.5.** Neliömatriisin  $A$  sanotaan olevan *symmetrinen*, jos  $A^\top = A$ . Neliömatriisin  $A$  sanotaan olevan *antisymmetrinen*, jos  $A^\top = -A$ .

**Esimerkki 9.6.** Merkitään

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 6 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 4 & -5 \\ -4 & 0 & -6 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix}.$$

Tällöin

$$B^\top = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 6 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix} = B \quad \text{ja} \quad C^\top = \begin{bmatrix} 0 & -4 & 5 \\ 4 & 0 & 6 \\ -5 & -6 & 0 \end{bmatrix} = -C.$$

Siis  $B$  on symmetrinen ja  $C$  on antisymmetrinen.

Transpoosioperaation käyttäytymistä matriisien laskutoimitusten kanssa valottaa seuraava lause.

**Lause 9.7.** *Seuraavat säännöt pätevät matriiseille  $A$  ja  $B$  sekä reaaliluvulle  $t$ , jos laskutoimitukset on määritelty (ts. matriisit ovat sopivaa tyyppiä):*

- a)  $(A^\top)^\top = A$
- b)  $(A + B)^\top = A^\top + B^\top$
- c)  $(AB)^\top = B^\top A^\top$
- d)  $(tA)^\top = t(A^\top)$ .

*Huom.* Erityisesti kannattaa painaa mieleen tulon tekijöiden järjestyksen vaihtuminen kohdassa c).

*Todistus.* Osoitetaan todeksi kohta c) ja jätetään loput kohdat lukijalle. Olkoot  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  ja  $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$ . Nyt sekä  $(AB)^\top$  että  $B^\top A^\top$  ovat molemmat  $p \times m$ -matriiseja. On osoitettava, että kyseisten matriisien alkiot ovat samoja. Olkoot  $i \in \{1, 2, \dots, p\}$  ja  $j \in \{1, 2, \dots, m\}$ . Nähdään, että

$$\begin{aligned} (AB)^\top(i, j) &= (AB)(j, i) = \sum_{k=1}^n A(j, k) \cdot B(k, i) = \sum_{k=1}^n A^\top(k, j) \cdot B^\top(i, k) \\ &= \sum_{k=1}^n B^\top(i, k) \cdot A^\top(k, j) = (B^\top A^\top)(i, j). \end{aligned}$$

Siten  $(AB)^\top = B^\top A^\top$ . □

## 9.5 Käänteismatriisi

Matriiseille ei ole määritelty jakolaskua. Joissakin tapauksissa tämä puute voidaan korjata käyttämällä niin sanottuja käänteismatriiseja, jotka toimivat samalla tavalla kuin käänteisluvut tavallisten lukujen kertolaskussa. Toisin sanoen käänteismatriisilla kertominen ajaa saman asian kuin jakaminen. Pian tullaan kuitenkin valitettavasti huomaamaan, että kaikilla matriiseilla ei ole käänteismatriisia. Kaiken lisäksi on kätevintä rajoittua tarkastelemaan vain neliömatriiseja.

**Määritelmä 9.8.** Olkoon  $A$  neliömatriisi. Jos on olemassa saman tyyppinen neliömatriisi  $B$ , jolle pätee

$$AB = I \quad \text{ja} \quad BA = I,$$

sanotaan, että  $A$  on *kääntyvä* ja  $B$  on matriisin  $A$  *käänteismatriisi*.

Joissakin lähteissä kääntyviä matriiseja kutsutaan säännöllisiksi matriiseiksi. Sellaisia matriiseja, joilla ei ole käänteismatriisia, kutsutaan toisinaan singulaarisiksi.

**Esimerkki 9.9.** Osoitetaan, että matriisin

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

käänteismatriisi on

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

laskemalla määritelmän vaatimat kertolaskut:

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ja

$$BA = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Koska  $AB = I$  ja  $BA = I$ , matriisi  $B$  on matriisin  $A$  käänteismatriisi.

**Esimerkki 9.10.** Läheskään kaikilla matriiseilla ei ole käänteismatriisia. Osoitetaan, että vaikkapa matriisilla

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ei ole käänteismatriisia. Oletetaan vastoin väitettä, että

$$B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

on matriisin  $A$  käänteismatriisi. Nyt  $AB = I$  eli

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Laskemalla yhtälön vasemmalla puolella oleva matriisi tulo, saadaan

$$\begin{bmatrix} a & b \\ a & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Nyt matriisien vasemmanpuoleisista sarakkeista nähdään, että  $a = 0$  ja toisaalta  $a = 1$ . Päädytään siis ristiriitaan. Näin ollen matriisilla  $A$  ei ole käänteismatriisia.

**Lause 9.11.** *Matriisilla on korkeintaan yksi käänteismatriisi.*

*Todistus.* Oletetaan, että matriisilla  $A$  on käänteismatriisit  $B$  ja  $B'$ . Nyt

$$B = BI = B(AB') = (BA)B' = IB' = B'.$$

Yllä olevan yhtälökettjun perusteella  $B$  ja  $B'$  ovat välttämättä sama matriisi. Näin ollen matriisin  $A$  käänteismatriiseja ei voi olla enempää kuin yksi.  $\square$

Jos matriisi  $A$  on kääntyvä, sen käänteismatriisille käytetään merkintää  $A^{-1}$ . Huomaa, että merkintää  $A^{-1}$  ei voi käyttää ennen kuin on varmistanut, että matriisi  $A$  todella on kääntyvä. Seuraava lause auttaa joidenkin matriisien käänteismatriisien löytämisessä.

**Lause 9.12.** *Oletetaan, että matriisit  $A$  ja  $B$  ovat kääntyviä. Tällöin myös matriisit  $A^{-1}$ ,  $AB$  ja  $A^\top$  ovat kääntyviä, ja niiden käänteismatriisit ovat seuraavat:*

- a)  $(A^{-1})^{-1} = A$
- b)  $(A^\top)^{-1} = (A^{-1})^\top$
- c)  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ .

*Todistus.* Lauseen matriisit osoitetaan kääntyviksi näyttämällä kussakin tapauksessa, että väitetty käänteismatriisi todella on matriisin käänteismatriisi.

a) Käänteismatriisin määritelmän mukaan  $AA^{-1} = I$  ja  $A^{-1}A = I$ . Tämä tarkoittaa saman määritelmän mukaan myös sitä, että  $A$  on matriisin  $A^{-1}$  käänteismatriisi. Siispä  $A^{-1}$  on kääntyvä ja voidaan lisäksi merkitä  $(A^{-1})^{-1} = A$ .

b) Osoitetaan, että matriisin  $A^\top$  käänteismatriisi on  $(A^{-1})^\top$ . Lauseen 9.7 nojalla pätee

$$A^\top(A^{-1})^\top = (A^{-1}A)^\top = I^\top = I.$$

Samalla tavalla osoitetaan, että  $(A^{-1})^\top A^\top = I$ . Siten  $(A^{-1})^\top$  on matriisin  $A^\top$  käänteismatriisi. Tästä seuraa myös, että matriisi  $A^\top$  on kääntyvä.

c) Matriisia  $AB$  koskevan väitteen todistaminen jätetään harjoitustehtäväksi.  $\square$

## $2 \times 2$ -matriisin käänteismatriisi

Matriiseille, joiden tyyppi on  $2 \times 2$ , on olemassa erityinen kaava käänteismatriisin löytämiseksi.

**Lause 9.13.** *Matriisi*

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

on kääntyvä, jos ja vain jos  $ad - bc \neq 0$ . Jos matriisi  $A$  on kääntyvä, sen käänteismatriisi on

$$\frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

*Todistus.* Oletetaan, että  $ad - bc \neq 0$ . Merkitään

$$B = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Laskemalla voidaan todeta, että  $AB = I$  ja  $BA = I$ . Siten  $B$  on matriisin  $A$  käänteismatriisi ja  $A$  on kääntyvä.

Oletetaan sitten, että  $ad - bc = 0$  ja osoitetaan, että matriisi  $A$  ei tällöin ole kääntyvä. Nyt on tutkittavana kaksi eri tapausta: joko  $a = 0$  tai  $a \neq 0$ . Jos  $a = 0$ , niin oletuksesta seuraa, että  $bc = 0$ . Siten joko  $b = 0$  tai  $c = 0$ . Tällöin

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{bmatrix} \quad \text{tai} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{bmatrix}.$$

Kummassakaan tapauksessa ei ole olemassa matriisiä  $B$ , jolle pätee  $AB = I$  ja  $BA = I$ . Ensimmäisessä tapauksessa tulon  $AB$  tulee nimittäin välttämättä nollarivi ja jälkimmäisessä tapauksessa tulon  $BA$  tulee välttämättä nollasarake. Siten  $A$  ei ole kääntyvä.

Tutkitaan sitten tapaus  $a \neq 0$ . Nyt  $d = bc/a$  ja

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & bc/a \end{bmatrix}.$$

Oletetaan, että on olemassa sellainen matriisi

$$B = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix},$$

että  $AB = I$ . Tällöin

$$AB = \begin{bmatrix} a & b \\ c & bc/a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax + bz & ay + bw \\ cx + bcz/a & cy + bcw/a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

eli

$$\begin{cases} ax + bz = 1 \\ ay + bw = 0 \\ cx + bcz/a = 0 \\ cy + bcw/a = 1. \end{cases}$$

Kolmannen yhtälön perusteella  $c(x+bz/a) = 0$ . Jos  $c = 0$ , päädytään samankaltaiseen tilanteeseen kuin silloin, kun  $a = 0$ . Siten voidaan olettaa, että  $c \neq 0$ . Tällöin täytyy päteä  $x+bz/a = 0$  eli  $x = -bz/a$ . Toisaalta ensimmäisen yhtälön perusteella  $x = (1 - bz)/a$ . Nyt  $-bz = 1 - bz$ , joten  $1 = 0$ . Tämä on mahdotonta. Siten matriisilla  $A$  ei ole käänteismatriisia.  $\square$

### Käänteismatriisin määrittäminen yleisessä tapauksessa

Suurempien kuin  $2 \times 2$ -matriisien käänteismatriisien laskemiseksi ei helppoa kaavaa. On kuitenkin olemassa menetelmä, jolla voidaan aina selvittää, onko matriisi kääntyvä. Jos matriisin on kääntyvä, voidaan menetelmän avulla lisäksi selvittää sen käänteismatriisi. Tässä luvussa kerrotaan, kuinka matriisiin kääntyvyyden ja mahdollisen käänteismatriisin voi selvittää. Luvussa 10 puolestaan paneudutaan siihen, miksi menetelmä toimii.

Matriisin kääntyvyyden selvittäminen ja käänteismatriisin etsiminen voidaan tehdä yhtä aikaa, ja se tapahtuu seuraavasti. Oletetaan, että halutaan selvittää, onko matriisi  $A$  kääntyvä. Yhdistetään matriisi  $A$  ja ykkösmatriisi  $I$  matriisiksi  $[A \mid I]$ . Tehdään tälle matriisille alkeisrivitoimituksia, joilla yritetään muuttaa  $A$  redusoiduksi porrasmatriisiksi. Jos  $A$  saadaan muutettua alkeisrivitoimitusten avulla ykkösmatriisiksi, on  $A$  kääntyvä. Lisäksi matriisin  $I$  paikalle muodostuu matriisin  $A$  käänteismatriisi.

**Esimerkki 9.14.** Tutkitaan, onko matriisilla

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

käänteismatriisi. Muokataan yhdistettyä matriisia

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 2 & 4 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

alkeisrivitoimituksilla samaan tapaan kuin Gaussin–Jordanin menetelmässä. Tavoitteena on saada vasemmalle puolelle ykkösmatriisi. Muokkaus voi tapahtua esimerkiksi seuraavasti:

$$\begin{aligned} & \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 2 & 4 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & -2 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{R_3 - 2R_1} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -10 & 1 & 0 & -2 \end{array} \right] \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \\ & \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -10 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\frac{1}{4}R_2} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{2} & \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{R_2 + \frac{5}{2}R_3} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{R_1 - 4R_3} \\ & \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

Koska matriisi  $A$  saatiin muutettua alkeisrivitoimituksilla ykkösmatriisiksi, on  $A$  kääntävä. Lisäksi sen käänteismatriisi on

$$\begin{bmatrix} 0 & -4 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Jos matriisi ei ole kääntävä, tulee myös se ilmi matriisia redusoidessa. Jos matriisia voidaan muokata alkeisrivitoimituksilla niin, että saadaan aikaiseksi nollarivi, ei matriisi ole kääntävä. Toisin sanoen matriisi ei voi olla kääntävä, jos se on riviekvivalentti sellaisen matriisin kanssa, jossa on nollarivi.

**Esimerkki 9.15.** Tutkitaan, onko matriisilla

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

käänteismatriisi. Ryhdytään muokkaamaan yhdistettyä matriisia alkeisrivitoimituksilla:

$$\begin{aligned} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] & \xrightarrow{(-1)R_1} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] & \xrightarrow{R_2-4R_1} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 4 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{R_3-3R_1} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right] & \xrightarrow{R_3-R_2} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

Koska matriisin  $B$  viimeisen rivin paikalle tuli nollarivi, matriisi  $B$  ei ole kääntävä.

## 9.6 Sarakevektorit

Usein avaruuden  $\mathbb{R}^n$  vektori  $(v_1, v_2, \dots, v_n)$  samastetaan matriisiin

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$$

kanssa. Joukon  $\mathbb{R}^{n \times 1}$  matriiseja kutsutaan *sarakevektoreiksi*. Kun avaruuden  $\mathbb{R}^n$  vektoreita ajatellaan sarakevektoreina, voi niitä kertoa matriiseilla: jos  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  ja  $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$ , on tulo  $A\bar{v}$  määritelty, kun  $\bar{v}$  tulkitaan joukon  $\mathbb{R}^{n \times 1}$  alkioksi.

**Esimerkki 9.16.** Matriisin

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$



ja vektorin  $\bar{v} = (-5, 3)$  tulo on

$$A\bar{v} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 13 \end{bmatrix}.$$

Tämä sarakevektori voidaan samastaa vektorin  $(2, 5, 13)$  kanssa.



*Todistus.* Oletetaan, että matriisi  $A$  on kääntyvä. Todistuksessa on kaksi osaa. On osoitettava, että  $A^{-1}\bar{b}$  on yhtälön ratkaisu ja että muita ratkaisuja ei ole.

Osoitetaan ensin, että  $A^{-1}\bar{b}$  on yhtälön ratkaisu sijoittamalla se yhtälön vasemmalle puolelle vektorin  $\bar{x}$  paikalle:

$$A(A^{-1}\bar{b}) = (AA^{-1})\bar{b} = I\bar{b} = \bar{b}.$$

Koska tuloksena oli yhtälön oikea puoli, esitetty ratkaisu toteuttaa yhtälön.

Osoitetaan sitten, ettei muita ratkaisuja ole. Oletetaan, että  $\bar{y}$  on jokin (toinen) ratkaisu. Tällöin  $A\bar{y} = \bar{b}$ . Kerrotaan yhtälön molemmat puolet vasemmalta matriisilla  $A^{-1}$ , jolloin saadaan

$$A^{-1}A\bar{y} = A^{-1}\bar{b}.$$

Koska  $A^{-1}A = I$ , edellinen yhtälö sievenee muotoon  $\bar{y} = A^{-1}\bar{b}$ . Kysymyksessä on siis sama ratkaisu kuin edellä. Siten ratkaisuja on vain yksi ja se on  $A^{-1}\bar{b}$ .  $\square$

*Huom.* Todistuksessa tarvittiin käänteismatriisin kumpaakin ominaisuutta:  $AA^{-1} = I$  ja  $A^{-1}A = I$ .

## 10.1 Alkeismatriisit

Myös alkeisrivitoimitukset voi ilmaista matriisikertolaskun avulla. Osoittautuu, että jos matriisia kerrotaan niin kutsutulla alkeismatriisilla, tullaan matriisille tehneeksi jokin alkeisrivitoimitus. Tästä havainnosta tulee olemaan hyötyä kääntyvien matriisien käsittelyssä.

**Määritelmä 10.2.** Matriisi on *alkeismatriisi*, jos se on saatu ykkösmatriisista yhdellä alkeisrivitoimituksella.

Esimerkiksi seuraavat matriisit ovat alkeismatriiseja:

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Nämä alkeismatriisit on saatu ykkösmatriisista tekemällä sille alkeisrivitoimitukset  $-\frac{1}{2}R_3$ ,  $R_2 \leftrightarrow R_4$  ja  $R_3 + 3R_1$ .

**Esimerkki 10.3.** Osoittautuu, että alkeismatriiseilla kertominen vastaa alkeisrivitoimitusten tekemistä. Tutkitaan tätä edellisen esimerkin alkeismatriisien ja matriisin

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{bmatrix}$$

avulla. Laskemalla nähdään, että

$$\begin{aligned}
 E_1 A &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ -\frac{1}{2}a_{31} & -\frac{1}{2}a_{32} & -\frac{1}{2}a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{bmatrix}, \\
 E_2 A &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \mathbf{a}_{21} & \mathbf{a}_{22} & \mathbf{a}_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ \mathbf{a}_{41} & \mathbf{a}_{42} & \mathbf{a}_{43} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \mathbf{a}_{41} & \mathbf{a}_{42} & \mathbf{a}_{43} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ \mathbf{a}_{21} & \mathbf{a}_{22} & \mathbf{a}_{23} \end{bmatrix} \quad \text{ja} \\
 E_3 A &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{3} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \mathbf{3a}_{11} + a_{31} & \mathbf{3a}_{12} + a_{32} & \mathbf{3a}_{13} + a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Huomataan, että jokaisella alkeismatriisilla kerrottaessa matriisille  $A$  tullaan tehneeksi sama alkeisriviooperaatio, jonka avulla alkeismatriisi muodostettiin.

Yksittäinen esimerkki ei takaa, että alkeismatriisilla kertominen vastaa aina alkeisrivitoimituksen tekemistä. Esimerkin perusteella voi kuitenkin ymmärtää, miksi näin on. Yleisen tapauksen todistaminen ei ole vaikeaa, mutta se on kuitenkin melko työlästä, joten tyydytään mainitsemaan tulos ilman todistusta.

**Lemma 10.4.** *Oletetaan, että  $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ . Olkoon  $E$  alkeismatriisi, joka saadaan tekemällä jokin alkeisrivitoimitus ykkösmatriisille  $I_n$ . Jos matriisille  $A$  tehdään sama alkeisrivitoimitus, tuloksena on matriisi  $EA$ .*

*Huom.* Lemma tarkoittaa apulauseetta. Se on siis pieni tulos, jota voidaan käyttää hyväksi tärkeämpien lauseiden todistamisessa.

**Lause 10.5.** *Alkeismatriisit ovat kääntyviä, ja alkeismatriisin käänteismatriisi on myös alkeismatriisi.*

*Todistus.* Myöskään tämän tuloksen tarkkaa todistusta ei esitetä tässä. Käydään kuitenkin läpi todistuksen idea.

Jokainen alkeisrivitoimitus voidaan peruuttaa toisella alkeisrivitoimituksella kuten kohta nähdään. Kutsutaan tätä alkeisrivitoimitusta alkuperäisen alkeisrivitoimituksen *käänteistoimitukseksi*.

Oletetaan, että  $a, b \in \mathbb{R}$  ja  $a \neq 0$ . Jos matriisille tehdään alkeisrivitoimitus  $R_i \leftrightarrow R_j$ , päästään takaisin alkutilanteeseen tekemällä sama alkeisrivitoimitus uudelleen. Alkeisrivitoimitus  $R_i \leftrightarrow R_j$  on siis itsensä käänteistoimitus. Alkeisrivitoimituksen  $aR_i$  käänteistoimitus on puolestaan  $\frac{1}{a}R_i$ , ja alkeisrivitoimituksen  $R_i + bR_j$  käänteistoimitus on  $R_i - bR_j$ .

Alkeismatriisin käänteismatriisi saadaan aina käänteistoimitusta vastaavasta alkeismatriisista. Alkeisrivitoimitusta  $R_i \leftrightarrow R_j$  vastaava alkeismatriisi on oma käänteismatriisinsa, alkeisrivitoimitusta  $aR_i$  vastaavan alkeismatriisin käänteismatriisi on alkeisrivitoimitusta  $\frac{1}{a}R_i$

vastaava alkeismatriisi ja niin edelleen. Alkeisrivitoimituksen tekeminen vastaa nimittäin edellisen lemmän nojalla alkeismatriisilla kertomista. Esimerkiksi alkeisrivitoimitukset  $aR_i$  ja  $\frac{1}{a}R_i$  peräkkäin suoritettuina eivät tee matriisille mitään. Siten niitä vastaavien alkeismatriisien tulo on ykkösmatriisi, jolla kertominen ei tee matriisille mitään.  $\square$

**Esimerkki 10.6.** Etsitään alkeismatriisin

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

käänteismatriisi. Matriisi vastaa alkeisrivitoimitusta  $R_3 + 3R_1$ . Tämän alkeisrivitoimituksen voi kumota tekemällä alkeisrivitoimituksen  $R_3 - 3R_1$ . Sitä vastaava alkeismatriisi on

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Laskemalla voi vielä varmistaa, että  $EF = I$  ja  $FE = I$ . Siis  $E^{-1} = F$ .

Lauseessa 10.1 todettiin jo kääntyvien matriisien merkitys yhtälöryhmän ratkaisun kannalta. Nyt tuota tulosta voidaan täydentää tarkastelemalla lisäksi alkeisrivioperaatioita ja niitä vastaavia alkeismatriiseja.

**Lause 10.7.** Oletetaan, että  $A$  on  $n \times n$  -neliömatrissi. Seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:

- a) Matrissi  $A$  on kääntyvä.
- b) Yhtälöllä  $A\bar{x} = \bar{b}$  on täsmälleen yksi ratkaisu kaikilla  $\bar{b} \in \mathbb{R}^n$ .
- c) Yhtälöllä  $A\bar{x} = \bar{0}$  on vain triviaali ratkaisu  $\bar{x} = \bar{0}$ .
- d) Matrissi  $A$  on riviekvivalentti ykkösmatriisin kanssa.
- e) Matrissi  $A$  on alkeismatriisien tulo.
- f) Matrissi  $A$  ei ole riviekvivalentti minkään nollarivin sisältävän matriisin kanssa.

*Todistus.* Osoitetaan väite todistamalla seuraavat päättelyketjut:

$$a) \Rightarrow b) \Rightarrow c) \Rightarrow d) \Rightarrow e) \Rightarrow a) \quad \text{ja} \quad d) \Rightarrow f) \Rightarrow d).$$

Tämän jälkeen tiedetään, että jokainen lauseen kohta on yhtäpitävä toisten kohtien kanssa.

a)  $\Rightarrow$  b): Väite on osoitettu lauseessa 10.1.

b)  $\Rightarrow$  c): Oletetaan, että yhtälöllä  $A\bar{x} = \bar{b}$  on täsmälleen yksi ratkaisu kaikilla  $\bar{b} \in \mathbb{R}^n$ . Tämä pätee myös, jos  $\bar{b} = \bar{0}$ . Toisaalta yhtälöllä  $A\bar{x} = \bar{0}$  on aina ratkaisu  $\bar{x} = \bar{0}$ . Siten  $\bar{x} = \bar{0}$  on ainoa ratkaisu.

c)  $\Rightarrow$  d): Oletetaan, että yhtälöllä  $A\bar{x} = \bar{0}$  on vain ratkaisu  $\bar{x} = \bar{0}$ . Merkitään  $A(i, j) = a_{ij}$  kaikilla  $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ . Yhtälöä  $A\bar{x} = \bar{0}$  vastaava lineaarinen yhtälöryhmä on

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

Yhtälöryhmässä on sama määrä yhtälöitä ja tuntemattomia. Koska yhtälöryhmällä on täsmälleen yksi ratkaisu  $\bar{x} = \bar{0}$ , se on ekvivalentti yhtälöryhmän

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ \vdots \\ x_n = 0 \end{cases}$$

kanssa. Tämä tarkoittaa, että matriisi  $A$  saadaan alkeisrivitoimituksilla muutettua ykkösmatriisiksi. Toisin sanottuna  $A$  on riviekvivalentti ykkösmatriisin kanssa.

d)  $\Rightarrow$  e): Oletetaan, että matriisi  $A$  on riviekvivalentti ykkösmatriisin kanssa. Tällöin lemmän 1.4 perusteella on olemassa alkeismatriisit  $E_1, \dots, E_k$ , joilla kertomalla matriisista  $A$  saadaan ykkösmatriisi. Päteee siis

$$E_k \cdots E_1 A = I.$$

Kun yhtälön molemmat puolet kerrotaan vasemmalta matriisilla  $E_k^{-1}$ , saadaan uusi yhtälö  $E_{k-1} \cdots E_1 A = E_k^{-1}$ . Kun tämän yhtälön vasemmat puolet kerrotaan puolestaan matriisilla  $E_{k-1}^{-1}$ , saadaan  $E_{k-2} \cdots E_1 A = E_{k-1}^{-1} E_k^{-1}$ . Jatkamalla samaan tapaan päädytään yhtälöön

$$A = E_1^{-1} \cdots E_{k-1}^{-1} E_k^{-1}.$$

Koska alkeismatriisin käänteismatriisi on myös alkeismatriisi, on väite todistettu.

e)  $\Rightarrow$  a): Oletetaan, että  $A = E_1 \cdots E_k$ , missä  $E_1, \dots, E_k$  ovat alkeismatriiseja. Merkitään  $B = E_k^{-1} \cdots E_1^{-1}$ . Nyt

$$\begin{aligned} AB &= (E_1 \cdots E_k)(E_k^{-1} \cdots E_1^{-1}) \\ &= E_1 \cdots (E_k E_k^{-1}) \cdots E_1^{-1} \\ &= E_1 \cdots E_{k-1} I E_{k-1}^{-1} \cdots E_1^{-1} \\ &\quad \vdots \\ &= E_1 E_1^{-1} = I. \end{aligned}$$

Siispä  $AB = I$ . Samalla tavalla nähdään, että  $BA = I$ . Siten  $B$  on matriisin  $A$  käänteismatriisi ja  $A$  on kääntyvä.

d)  $\Rightarrow$  f): Oletetaan, että  $A$  on riviekvivalentti ykkösmatriisin kanssa. Tehdään lisäksi vastaoletus, että  $A$  on riviekvivalentti jonkin matriisin  $B$  kanssa, joka sisältää nollarivin. Tällöin

matriisiyhtälöitä  $A\bar{x} = \bar{0}$ ,  $I\bar{x} = \bar{0}$  ja  $B\bar{x} = \bar{0}$  vastaavilla yhtälöryhmillä on kaikilla samat ratkaisut.

Matriisi  $B$  sisältää nollarivin, joten joltakin sen riviltä puuttuu johtava alkio. Koska  $B$  sisältää yhtä monta riviä kuin saraketta, myös jostakin sen sarakkeesta puuttuu johtava alkio. Täten yhtälöryhmällä  $B\bar{x} = \bar{0}$  on vapaa muuttuja ja ratkaisuja on ääretön määrä. Kuitenkin yhtälöllä  $I\bar{x} = \bar{0}$  on vain yksi ratkaisu:  $\bar{x} = \bar{0}$ . Tämä on ristiriita, joten vasta oletus on väärä ja  $A$  ei ole riviekvivalentti nollarivin sisältävän matriisin kanssa.

f)  $\Rightarrow$  d): Oletetaan, että  $A$  ei ole riviekvivalentti minkään nollarivin sisältävän matriisin kanssa. Olkoon  $B$  redusoitu porrasmatriisi, joka on riviekvivalentti matriisin  $A$  kanssa. Oletuksen mukaan  $B$  ei sisällä nollarivejä, joten sen jokaisella rivillä on johtava alkio. Koska  $B$  on neliömatriisi, myös sen jokaisessa sarakkeessa on johtava alkio. Tällöin  $B$  on itse asiassa ykkösmatriisi, joten  $A$  on riviekvivalentti ykkösmatriisin kanssa.  $\square$

## 10.2 Käänteismatriisin määrittäminen - Miksi menetelmä toimii?

Luvussa 9.5 esitettiin menetelmä, jonka avulla voidaan tutkia, onko matriisi kääntyvä. Nyt voidaan vihdoin perustella, miksi menetelmä toimii.

Menetelmässä matriisia muokataan alkeisrivitoimituksilla. Jos näin saadaan aikaiseksi ykkösmatriisi, on alkuperäinen matriisi kääntyvä. Tämä perustuu siihen, että jos matriisi  $A$  onnistutaan muuttamaan alkeisrivitoimituksilla ykkösmatriisiksi, niin  $A$  on lauseen 10.7 nojalla kääntyvä eli sillä on käänteismatriisi  $A^{-1}$ .

Jos matriisi on kääntyvä, käytetyistä alkeisrivitoimituksista saadaan myös selville, mikä käänteismatriisi on. Oletetaan, että matriisi  $A$  on muutettu ykkösmatriisiksi alkeisrivitoimituksilla, joita vastaavat alkeismatriisit  $E_1, \dots, E_k$ . Nyt

$$E_k \cdots E_1 A = I.$$

Tällöin käänteismatriisille pätee

$$A^{-1} = IA^{-1} = (E_k \cdots E_1 A)A^{-1} = E_k \cdots E_1 (AA^{-1}) = E_k \cdots E_1 I.$$

Tämä tarkoittaa, että tekemällä ykkösmatriisille  $I$  samat alkeisrivitoimitukset kuin tehtiin alunperin matriisille  $A$  päädytään käänteismatriisiin  $A^{-1}$ . Siis

$$[A \mid I] \rightsquigarrow [I \mid A^{-1}].$$

Siksi käänteismatriisi  $A^{-1}$  ilmestyy ykkösmatriisin  $I$  paikalle.

Lause 10.7 antaa välineet myös sen osoittamiseen, että matriisi ei ole kääntyvä. Lauseen mukaan matriisi  $A$  ei ole kääntyvä, jos se on riviekvivalentti sellaisen matriisin kanssa, joka sisältää nollarivin. Tämä voidaan ilmaista myös toisin: matriisi  $A$  ei ole kääntyvä, jos siihen saadaan alkeisrivitoimituksilla muodostettua nollarivi. Näin olemme perustelleet loputkin luvussa 9.5 esitetystä menetelmästä. Matriisin kääntyvyyden selvittämisessä käytettävä menetelmä perustuu siten täysin lauseeseen 10.7.

### 10.3 Lisää kääntyvyyteen liittyviä tuloksia

Tässä aluvuossa esitetään kaksi toisinaan hyödyllistä tulosta. Molempien todistukset perustuvat matriisien ja yhtälöryhmien väliseen suhteeseen. Ensimmäisessä todetaan, että matriisin kääntyvyyden toteamiseksi ei tarvitse tarkastella matriisituloa molemmin päin.

**Lause 10.8.** *Olkoot  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Jos  $BA = I$ , niin  $AB = I$  eli matriisit  $A$  ja  $B$  ovat toistensa käänteismatriiseja.*

*Todistus.* Oletetaan, että  $BA = I$ . Osoitetaan ensin, että matriisi  $A$  on kääntyvä. Tehdään tämä osoittamalla, että homogeenisella yhtälöryhmällä  $A\bar{x} = \bar{0}$  on vain triviaaliratkaisu. Kerromalla yhtälö puolittain matriisilla  $B$  saadaan  $BA\bar{x} = B\bar{0}$ . Oletuksen mukaan  $BA = I$  ja toisaalta  $B\bar{0} = \bar{0}$ , joten yhtälö tulee muotoon  $\bar{x} = \bar{0}$ . Voidaan siis todeta, että yhtälöryhmän  $A\bar{x} = \bar{0}$  ainoa ratkaisu on  $\bar{x} = \bar{0}$ . Lauseen 10.7 nojalla tästä seuraa, että  $A$  on kääntyvä.

Koska  $A$  on kääntyvä, käänteismatriisi  $A^{-1}$  on olemassa. Kerrotaan sillä yhtälön  $BA = I$  molemmat puolet oikealta. Näin saadaan yhtälö  $(BA)A^{-1} = IA^{-1}$ , joka supistuu muotoon  $B = A^{-1}$ . Siten  $B$  on matriisin  $A$  käänteismatriisi. Muut väitteet seuraavat tästä. Nyt tiedetään, että  $AB = I$ . Lisäksi matriisin  $B$  käänteismatriisi on lauseen 9.12 nojalla  $A$ .  $\square$

Toinen tulos liittyy siihen, millä ehdoilla kahden matriisin tulo on tai ei ole kääntyvä.

**Lause 10.9.** *Olkoot  $A$  ja  $B$  neliömatriiseja. Tällöin seuraavat väitteet pätevät:*

- a) *Jos  $A$  ja  $B$  ovat molemmat kääntyviä, myös tulo  $AB$  on kääntyvä.*
- b) *Jos vain toinen matriiseista  $A$  ja  $B$  on kääntyvä, tulo  $AB$  ei ole kääntyvä.*
- c) *Jos kumpikaan matriiseista  $A$  ja  $B$  ei ole kääntyvä, tulo  $AB$  ei ole kääntyvä.*

*Todistus.* a) Tämä on todistettu lauseessa 9.12.

b) Oletetaan esimerkiksi, että  $A$  on kääntyvä ja  $B$  ei. Tehdään vastaoletus, että tulo  $AB$  on kääntyvä ja sillä on käänteismatriisi  $C$ . Tällöin voidaan laskea

$$(CA)B = C(AB) = I.$$

Lauseen 10.8 nojalla  $B$  on kääntyvä. Tämä on ristiriita, joten vastaoletus on väärä, eli tulo  $AB$  ei ole kääntyvä.

Tapaus, jossa  $A$  ei ole kääntyvä ja  $B$  on kääntyvä, todistetaan samaan tapaan.

c) Tämän kohdan todistuksessa tarvitaan matriisien ja yhtälöryhmien välistä yhteyttä. Oletetaan, että  $A$  ja  $B$  eivät ole kääntyviä. Tarkastellaan homogeenista yhtälöryhmää  $(AB)\bar{x} = \bar{0}$  ja yritetään osoittaa, että sillä on muitakin kuin triviaaliratkaisu.

Koska  $B$  ei ole kääntyvä, yhtälöryhmällä  $B\bar{x} = \bar{0}$  on jokin epätriviaali ratkaisu  $\bar{x} = \bar{v} \neq \bar{0}$ . Tällöin

$$(AB)\bar{v} = A(B\bar{v}) = A\bar{0} = \bar{0}.$$

Siispä  $\bar{x} = \bar{v}$  on myös yhtälöryhmän  $(AB)\bar{x} = \bar{0}$  ratkaisu. Koska kyseisellä yhtälöryhmällä on epätriviaali ratkaisu, lauseesta 10.7 seuraa, että matriisi  $AB$  ei ole kääntyvä.  $\square$



## 11 Determinantti

Neliömatriisille voidaan laskea luku, joka kertoo muun muassa, onko matriisi kääntyvä vai ei. Tätä lukua kutsutaan matriisin determinantiksi. Determinantilla on muitakin sovelluksia, mutta tässä yhteydessä tarkastelemme vain sen yhteyttä matriisin kääntyvyyteen.

Determinantti voidaan määritellä monin eri tavoin. Tähän lukuun on valittu eräs melko yksinkertainen tapa. Kaikki luvussa esitellyt tulokset voitaisiin johtaa valitusta määritelmästä, mutta useimmat todistukset olisivat niin työläitä, että niistä tyydytään antamaan vain perusidea. Käytettäessä hieman kehittyneempiä määritelmiä monet todistukset helpottuisivat huomattavasti, mutta itse määritelmän esittäminen olisi työläämpää.

### 11.1 Pienten matriisien determinantit

Tarkastellaan ensin korkeintaan  $3 \times 3$ -matriisien determinantteja. Determinantti voidaan laskea vain neliömatriisille.

#### Määritelmä 11.1.

a) Matriisin

$$A = [a]$$

determinantti on  $\det(A) = a$ .

b) Matriisin

$$B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

determinantti on  $\det(B) = ad - bc$ .

c) Matriisin

$$C = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$$

determinantti on

$$\begin{aligned} \det(C) &= a_1(b_2c_3 - c_2b_3) - a_2(b_1c_3 - b_3c_1) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1) \\ &= a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_2b_1c_3 - a_1b_3c_2. \end{aligned}$$

Matriisin determinanttia voi merkitä myös pystyviivojen avulla:

$$\det(A) = |a|, \quad \det(B) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \quad \text{ja} \quad \det(C) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

**Esimerkki 11.2.** Matriisin  $A = [4]$  determinantti on  $\det(A) = 4$ . Matriisin

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

determinantti on puolestaan  $\det(B) = 1 \cdot 4 - (-1) \cdot 2 = 4 + 2 = 6$ . Edelleen matriisin

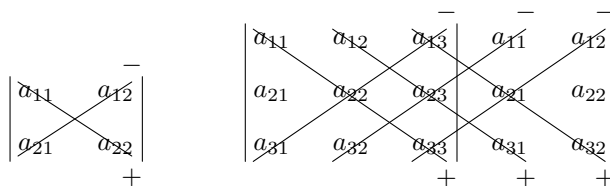
$$C = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

determinantti on

$$\begin{aligned} \det(C) &= -2(1 \cdot 4 - (-1) \cdot 2) - 3(0 \cdot 4 - (-1) \cdot 1) + 2(0 \cdot 2 - 1 \cdot 1) \\ &= -2 \cdot 6 - 3 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) = -17. \end{aligned}$$

Matriisille, jonka tyyppi on  $2 \times 2$ , voi käyttää determinantin laskemiseen kuvassa 11.26 esitettyä muistisääntöä. Piirretään matriisin poikki vinoviivat. Samalla viivalla olevat alkioit kerrotaan keskenään. Jos viiva on lävistäjän suuntainen, tulee tulon eteen plusmerkki ja muutoin miinusmerkki. Lopuksi tulot summataan.

Kuvassa 11.26 on esitetty laskemista helpottava muistisääntö myös suuremman, tyyppiä  $3 \times 3$  olevan matriisin determinantille. Kirjoitetaan matriisin vierelle matriisin ensimmäinen ja toinen sarake. Piirretään kuvion päälle matriisin lävistäjän suuntaisia viivoja sekä vastakkaisuuntaisia viivoja. Samalla viivalla olevat alkioit kerrotaan keskenään. Jos viiva on lävistäjän suuntainen, tulee tulon eteen plusmerkki. Jos viiva on vastakkaisuuntainen, tulee tulon eteen miinusmerkki. Lopuksi tulot lasketaan yhteen.



Kuva 11.26: Muistisäännöt  $2 \times 2$  -determinantin ja  $3 \times 3$  -determinantin laskemiseksi.

Determinantin merkitys näkyy siinä, että se kertoo matriisin kääntyvyydestä. Lauseen 9.13 nojalla  $2 \times 2$  -matriisi

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

on kääntyvä, jos ja vain jos  $ad - bc \neq 0$ . Toisaalta matriisin  $A$  determinantti on  $ad - bc$ . Matriisi  $A$  on siis kääntyvä, jos ja vain jos  $\det(A) \neq 0$ . Samanlainen tulos pätee myös  $3 \times 3$  -matriisien determinanteille sekä myöhemmin määriteltäville suurempien matriisien determinanteille. Todistus on esitetty tämän luvun loppupuolella.

**Lause 11.3.** Oletetaan, että  $A$  on  $n \times n$  -matriisi. Matriisi  $A$  on kääntyvä, jos ja vain jos  $\det(A) \neq 0$ .

**Esimerkki 11.4.** Tutkitaan, onko vektorijono  $((2, 1, -1), (0, 1, -3), (-2, 1, -5))$  avaruuden  $\mathbb{R}^3$  kanta. Kyseessä on kanta, mikäli jokainen vektori  $\bar{w} \in \mathbb{R}^3$  voidaan ilmaista yksikäsitteisesti

annettujen vektorien lineaarikombinaationa. Tutkittava yhtälöryhmä voidaan ilmaista matriisimuodossa yhtälönä  $A\bar{x} = \bar{w}$ , missä

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & -5 \end{bmatrix}.$$

Yhtälöryhmällä on yksikäsitteinen ratkaisu, jos ja vain jos kerroinmatriisi  $A$  on kääntyvä (lause 10.7). Toisaalta lauseen 11.3 nojalla  $A$  on kääntyvä, jos ja vain jos sen determinantti on nolasta poikkeava. Lasketaan determinantti:

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & -5 \end{vmatrix} = 2(1 \cdot (-5) - 1 \cdot (-3)) - 0 - 2(1 \cdot (-3) - 1 \cdot (-1)) \\ &= 2 \cdot (-2) - 2 \cdot (-2) = 0. \end{aligned}$$

Koska determinantti on 0, matriisi  $A$  ei ole kääntyvä. Tästä syystä tutkittavan yhtälöryhmän ratkaisua ei ole olemassa tai se ei ole yksikäsitteinen. Annettu vektorijono ei siis muodosta kantaa.

## 11.2 Determinantin kehityskaavat

Suurempien matriisien determinantit voidaan laskea pienempien matriisien determinanttien avulla.

**Määritelmä 11.5.** Olkoon  $A$  jokin  $n \times n$ -matriisi. Merkitään

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Jos  $n = 1$ , niin  $\det(A) = a_{11}$ . Jos taas  $n > 1$ , niin

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{1+j} a_{1j} \det(A_{1j}),$$

missä  $A_{ij}$  on matriisi, joka on saatu matriisista  $A$  poistamalla  $i$ :s rivi ja  $j$ :s sarake.

Yleisen determinantin määritelmä ei ole ristiriidassa aiempien determinantin määritelmien kanssa. Esimerkiksi  $3 \times 3$ -matriisin determinantti on uuden määritelmän mukaan

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} &= a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \\ &= a_1(b_2c_3 - c_2b_3) - a_2(b_1c_3 - b_3c_1) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1). \end{aligned}$$

Määritelmässä olevat kertoimet  $a_{1j}$  otetaan matriisin ensimmäiseltä riviltä. Sanotaan, että determinantti on tällöin *kehitetty ensimmäisen rivin suhteen*. Yhtä hyvin voidaan käyttää muita rivejä tai jopa muita sarakkeita.

**Lause 11.6.** *Oletetaan, että  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , ja merkitään  $A(i, j) = a_{ij}$  kaikilla  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ .*

a) *Olkoon  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Tällöin*

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij}),$$

*missä  $A_{ij}$  on matriisi, joka on saatu matriisista  $A$  poistamalla  $i$ :s rivi ja  $j$ :s sarake. Kyseessä on kehitys rivin  $i$  suhteen.*

b) *Olkoon  $j \in \{1, \dots, n\}$ . Tällöin*

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij}),$$

*missä  $A_{ij}$  on matriisi, joka on saatu matriisista  $A$  poistamalla  $i$ :s rivi ja  $j$ :s sarake. Kyseessä on kehitys sarakkeen  $j$  suhteen.*

*Todistuksen idea.* Lause voidaan todistaa tarkastelemalla, millaiseen lausekkeeseen määritelmän 11.5 kehityskaava lopulta johtaa. Syntyvä lauseke on summa tuloista

$$\pm a_{1k_1} a_{2k_2} \cdots a_{nk_n},$$

missä  $k_1, \dots, k_n$  ovat sarakkeiden indeksit jossakin järjestyksessä. Esimerkiksi tyyppin  $3 \times 3$  matriisin determinantin laskeminen johtaa näillä merkinnöillä lausekkeeseen

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Kunkin termin etumerkki määräytyy siitä, onko sarakkeiden järjestys  $k_1, \dots, k_n$  alkuperäisen järjestyksen  $1, \dots, n$  ns. parillinen vai pariton permutaatio. Tämän havainnon jälkeen on suoraviivaista tarkistaa, että jokainen kehityskaava johtaa itse asiassa täsmälleen samaan lausekkeeseen.  $\square$

Toisinaan voi säästää vaivaa, jos valitsee viisaasti rivin tai sarakkeen, jonka suhteen determinantin kehittää. Lasketaan matriisin

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -4 & -1 \end{bmatrix}$$

determinantti kehittämällä se aluksi kolmannen rivin ja välivaiheessa kolmannen sarakkeen suhteen:

$$\begin{aligned}
\det(D) &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -4 & -1 \end{vmatrix} \\
&= 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -4 & -1 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & -4 & -1 \end{vmatrix} + (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -4 \end{vmatrix} \\
&= - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = - \left( 0 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right) \\
&= -(0 + (1 \cdot 1 - 2 \cdot 2) - (1 \cdot 1 - 0 \cdot 2)) = -(0 - 3 - 1) = 4.
\end{aligned}$$

Kehityskaavojen etumerkkien vaihtelu (eli kaavoissa muotoa  $(-1)^{i+j}$  oleva kerroin) saadaan shakkilautaa muistuttavasta kuviosta:

$$\begin{bmatrix} + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & \\ + & - & + & - & \\ \vdots & & & & \end{bmatrix}$$

Matriisin tilalle ajatellaan plus- ja miinusmerkeistä koostuva ruudukko, jonka vasemmassa yläkulmassa on plusmerkki. Jos matriisin alkion kohdalla on plusmerkki, tulee kehityskaavassa alkion eteen plusmerkki. Vastaavasti jos alkion kohdalla on miinusmerkki, tulee kehityskaavaankin miinusmerkki. Kunkin alkion omaa etumerkkiä ei myöskään sovi unohtaa.

### 11.3 Determinantin ominaisuuksia

Tarkastellaan vielä, miten determinantti suhtautuu matriisien alkeisrivitoimituksiin sekä laskutoimituksiin. Seuraavan tuloksen voi todistaa pienille matriiseille suoraan laskemalla, ja yleisen tapauksen voi johtaa determinanttien kehityskaavoista.

**Lause 11.7.** *Oletetaan, että  $A$  on neliömatriisi.*

- 1) *Jos matriisi  $B$  saadaan  $A$ :sta vaihtamalla kaksi riviä keskenään, niin  $\det(B) = -\det(A)$ .*
- 2) *Jos matriisi  $B$  saadaan matriisista  $A$  kertomalla jokin rivi nolasta poikkeavalla reaali-luvulla  $t$ , niin  $\det(B) = t \det(A)$ .*
- 3) *Jos matriisi  $B$  saadaan matriisista  $A$  lisäämällä johonkin riviin jokin toinen rivi reaali-luvulla  $k$  kerrottuna, niin  $\det(B) = \det(A)$ .*

Lauseen 11.10 kohdasta a) seuraa, että determinantin sarakkeet käyttäytyvät täsmälleen samalla tavalla kuin sen rivit. Lauseesta 11.7 saadaan siis seuraavat muistisäännöt:

- 1) Jos matriisin kaksi riviä (tai saraketta) vaihtaa keskenään, determinantin etumerkki muuttuu:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 1 & 6 & 0 \\ 5 & 8 & 4 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 3 & 2 & 7 \\ 5 & 8 & 4 \end{vmatrix}.$$

- 2) Jos matriisin rivillä (tai sarakkeessa) kaikilla alkioilla on yhteinen nollasta poikkeava tekijä, tuon yhteisen tekijän voi ottaa determinantin eteen kertoimeksi:

$$\begin{vmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 3 & 2 & 7 \\ 5 & 8 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 7 \\ 5 & 4 & 4 \end{vmatrix}.$$

- 3) Jos matriisin riviin (tai sarakkeeseen) lisätään jokin toinen rivi (tai sarake) vakiolla kerrottuna, matriisin determinantti ei muutu:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 7 \\ 5 & 4 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -8 & 7 \\ 5 & 4 & 4 \end{vmatrix}.$$

Lauseesta seuraa myös, että eräiden matriisien determinantti on helppo määrittää suoraan matriisista.

**Lause 11.8.** *Oletetaan, että  $A$  on neliömatriisi. Tällöin*

- 1) jos matriisissa  $A$  on nollarivi (nollasarake), niin  $\det(A) = 0$
- 2) jos matriisissa  $A$  on kaksi samaa riviä (samaa saraketta), niin  $\det(A) = 0$
- 3) jos  $A$  on kolmiomatriisi eli kaikki lävistäjän alapuoliset tai yläpuoliset alkiot ovat nollia, niin matriisin  $A$  determinantti on lävistäjäalkioiden tulo.

*Todistus.* Todistetaan vain rivejä koskevat väitteet. Sarakkeita koskevat väitteet voidaan käsitellä samalla tavalla.

- 1) Kerrotaan matriisin nollarivi luvulla  $-1$ , jolloin matriisi ei muutu. Edeltävän lauseen mukaan pätee siis  $\det(A) = -1 \cdot \det(A)$ , josta seuraa, että  $\det(A) = 0$ .
- 2) Vaihdetaan matriisin samanlaiset rivit keskenään, jolloin matriisi ei muutu. Edeltävän lauseen mukaan  $\det(A) = -\det(A)$ , joten  $\det(A) = 0$ .
- 3) Tulos nähdään suoraan kehittämällä matriisi rivi riviltä alkaen ylimmästä tai alimmasta rivistä, jolla on vain yksi nollasta poikkeava alkio.  $\square$

Edeltäviä lauseita voidaan käyttää hyväksi determinantin laskemisessa. Kun matriisi muutetaan porrasmatriisiksi alkeisrivitoimitusten avulla, determinantti muuttuu lauseessa 11.7 kuvatulla tavalla. Porrasmatriisin determinantti voidaan puolestaan määrittää lauseen 11.8 avulla.

**Esimerkki 11.9.** Lasketaan matriisin

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ -2 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & -5 \end{bmatrix}$$

determinantti muuntamalla se vaiheittain porrasmatriisiksi. Tarvittavat alkeisrivitoimitukset ovat seuraavat:

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ -2 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2+2R_1} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3-2R_1} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & -2 & -1 \\ 3 & 2 & -1 & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_4-3R_1} \\
 & \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & -2 & -1 \\ 0 & 8 & -1 & -8 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_4-2R_3} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -6 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_4-3R_2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -12 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \\
 & \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -12 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Tuloksena on yläkolmiomatriisi, jonka determinantti on lävistäjäalkioiden tulo eli tässä tapauksessa  $-48$ . Lauseen 11.7 perusteella ainoastaan viimeinen alkeisrivitoimitus muutti matriisin determinanttia, ja sekin aiheutti vain etumerkin muutoksen. Siispä alkuperäisen matriisin determinantti oli  $48$ .

Alkeisrivitoimituksia tarkastelemalla voidaan todistaa myös kääntyvän matriisin determinanttiin liittyvä lause.

*Lauseen 11.3 todistus.* Osoitetaan, että matriisi on kääntyvä, jos ja vain jos sen determinantti ei ole nolla. Neliömatriisi  $A$  on kääntyvä täsmälleen silloin, kun se voidaan muuttaa alkeisrivitoimituksilla ykkösmatriisiksi, muuten porrasmatriisiin tulee nollarivi. Ykkösmatriisin determinantti on  $1$  ja nollarivin omaavan matriisin  $0$ . Toisaalta jokainen alkeisrivitoimitus säilyttää determinantin nollana tai nollassa poikkeavana sen mukaan, mitä se oli alun perin. Täten matriisi  $A$  on kääntyvä täsmälleen silloin, kun sen determinantti on nollassa poikkeava.  $\square$

Tarkastellaan vielä matriisien laskutoimituksien vaikutusta determinanttiin.

**Lause 11.10.** *Oletetaan, että  $A$  ja  $B$  ovat neliömatriiseja. Tällöin*

- a)  $\det(A^\top) = \det(A)$
- b)  $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ .

*Todistuksen idea.*

- a) Tulos seuraa siitä, että determinantit voidaan kehittää yhtä hyvin sarakkeiden kuin rivienkin suhteen.
- b) Jos jompikumpi tai molemmat matriiseista  $A$  ja  $B$  eivät ole kääntyviä, lauseen 10.9 perusteella myöskään niiden tulo ei ole kääntyvä. Tällöin väite pätee lauseen 11.3 nojalla. Oletetaan sitten, että  $A$  ja  $B$  ovat kääntyviä ja kirjoitetaan ne alkeismatriisien tuloina:

$$A = E_1 \cdots E_r \quad \text{ja} \quad B = F_1 \cdots F_s.$$

Lauseesta 11.7 seuraa, että jos  $E$  on alkeismatriisi, jokaiselle neliömatriisille  $M$  pätee

$$\det(EM) = \det(E) \det(M).$$

Käyttämällä tätä havaintoa toistuvasti yllä esitettyihin tuloihin, nähdään, että

$$\det(A) = \det(E_1) \cdots \det(E_r) \quad \text{ja} \quad \det(B) = \det(F_1) \cdots \det(F_s).$$

Toisaalta  $AB = E_1 \cdots E_r F_1 \cdots F_s$ , ja samalla tavoin kuin edellä saadaan

$$\det(AB) = \det(E_1) \cdots \det(E_r) \cdot \det(F_1) \cdots \det(F_s).$$

Väite seuraa tästä. □

**Lause 11.11.** *Oletetaan, että neliömatriisi  $A$  on kääntyvä. Tällöin*

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}.$$

*Todistus.* Oletuksen mukaan matriisi  $A$  on kääntyvä, joten sillä on käänteismatriisi  $A^{-1}$ . Edellisen lauseen b)-kohdan nojalla pätee

$$\det(A) \det(A^{-1}) = \det(AA^{-1}) = \det(I) = 1.$$

Toisaalta lauseen 11.3 mukaan  $\det(A) \neq 0$ , sillä  $A$  on kääntyvä. Jakamalla puolittain saadaan  $\det(A^{-1}) = 1/\det(A)$ . □



## 12 Ominaisarvot ja diagonalisointi

Tässä luvussa tarkastellaan neliömatriisin ominaisarvoja ja diagonalisointia. Sovelluksena esitetään laskumenetelmä diagonalisoituvan matriisin potensseille. Ominaisarvoja tarkastellaan lisää kurssin toisessa osassa.

### 12.1 Ominaisarvon määritelmä

Palautetaan mieleen, että  $m \times n$  -matriisilla voi kertoa avaruuden  $\mathbb{R}^n$  vektoria, kun vektori kirjoitetaan sarakevektorina (ks. luku 9.6). Esimerkiksi matriisin

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

ja vektorin  $(1, 2)$  tulo on

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

eli vektori  $(5, 10)$ .

Huomataan, että matriisilla  $A$  kertominen vastaa vektorin  $(1, 2)$  tapauksessa skalaarilla viisi kertomista. Sanotaan, että matriisilla  $A$  on ominaisarvo 5, johon liittyy ominaisvektori  $(1, 2)$ . Matriisin ominaisarvoista puhutaan siis silloin, kun matriisilla kertominen vaikuttaa johonkin vektoriin samalla tavalla kuin skalaarilla kertominen. Tuo vektori on silloin matriisin ominaisvektori ja vastaava skalaari on matriisin ominaisarvo.

**Määritelmä 12.1.** Oletetaan, että  $A$  on  $n \times n$  -neliömatriisi. Luku  $\lambda \in \mathbb{R}$  on matriisin  $A$  ominaisarvo, jos on olemassa sellainen vektori  $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$ , että  $\bar{v} \neq \bar{0}$  ja

$$A\bar{v} = \lambda\bar{v}.$$

Vektoria  $\bar{v}$ , joka toteuttaa yllä mainitun ehdon kutsutaan ominaisarvoon  $\lambda$  liittyväksi ominaisvektoriksi.

*Huom. 1.* Edellinen määritelmä on sekä ominaisarvon että ominaisvektorin määritelmä. Ominaisarvoa ei voida määritellä ilman ominaisvektoreita eikä ominaisvektoreista voida puhua mainitsematta, mihin ominaisarvoon ne liittyvät.

*Huom. 2.* Nollavektorin ei haluta olevan ominaisvektori, sillä jos niin olisi, kaikki reaalityyppiset olisivat kaikkien matriisien ominaisarvoja, koska  $A\bar{0} = \lambda\bar{0}$  kaikilla  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

**Esimerkki 12.2.** Matriisilla

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

on ominaisarvo 4, johon liittyy ominaisvektori  $(1, 1)$ . Tämä nähdään laskemalla matriisin  $A$  ja vektorin  $(1, 1)$  tulo:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Samaa ominaisarvoa voi vastata useampi eri ominaisvektori. Esimerkiksi  $(2, 2)$  on myös matriisin  $A$  ominaisarvoa 4 vastaava ominaisvektori, sillä

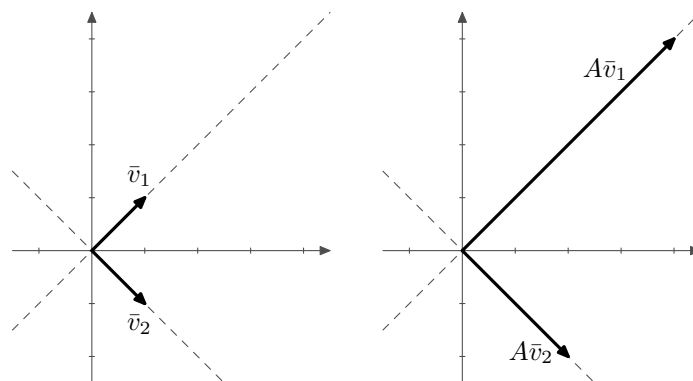
$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 8 \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Matriisilla  $A$  on ominaisarvon 4 lisäksi toinenkin ominaisarvo. Huomataan nimittäin, että

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Siten myös luku 2 on matriisin  $A$  ominaisarvo.

Kun matriisilla kertoo ominaisvektoria  $\bar{v}$ , tuloksena on vektorin  $\bar{v}$  skalaarimonikerta. Toisin sanoen tulos on vektorin  $\bar{v}$  virittämällä suoralla (ks. kuva 12.27).



Kuva 12.27: Vektori  $\bar{v}_1 = (1, 1)$  on matriisin  $A$  ominaisvektori, sillä  $A\bar{v}_1$  on vektorin  $\bar{v}_1$  virittämällä suoralla. Samoin vektori  $\bar{v}_2 = (1, -1)$  on matriisin  $A$  ominaisvektori, sillä  $A\bar{v}_2$  on vektorin  $\bar{v}_2$  virittämällä suoralla.

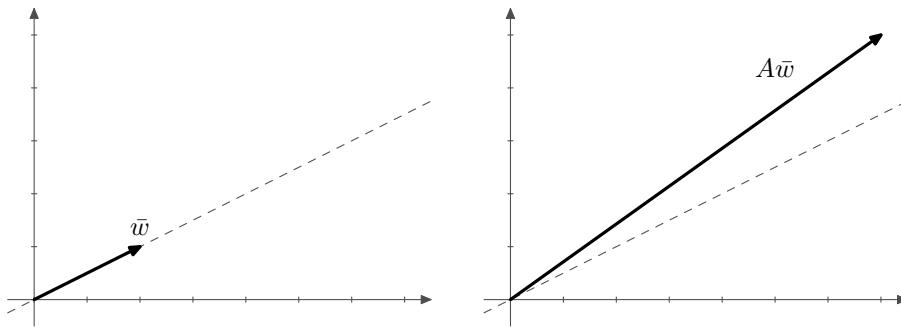
Tutkitaan vielä lopuksi, onko vektori  $\bar{w} = (2, 1)$  matriisin  $A$  ominaisvektori. Nähdään, että  $A\bar{w} = (7, 5)$ . Tuloksena ei ole vektorin  $\bar{w}$  skalaarimonikerta, joten  $\bar{w}$  ei ole matriisin  $A$  ominaisvektori.

Kuten edellinen esimerkki osoittaa, matriisilla voi olla useampi kuin yksi ominaisarvo. Kunkin ominaisarvoon liittyvät omat ominaisvektorit, ja myös niitä on kullakin ominaisarvolla useita.

**Esimerkki 12.3.** Jatketaan edellistä esimerkkiä ja etsitään kaikki matriisin  $A$  ominaisarvoa 4 vastaavat ominaisvektorit. On siis ratkaistava yhtälöstä  $A\bar{v} = 4\bar{v}$  tuntematon  $\bar{v}$ . Yhtälö saadaan muotoon

$$A\bar{v} - 4\bar{v} = \bar{0}.$$

Tästä yhtälöstä haluttaisiin nyt ottaa yhteiseksi tekijäksi  $\bar{v}$ , mutta se ei onnistu, sillä  $A$  on matriisi ja 4 on reaaliluku eikä niitä voi vähentää toisistaan. Huomataan kuitenkin, että luvulla



Kuva 12.28: Vektori  $\bar{w} = (2, 1)$  ei ole matriisin  $A$  ominaisvektori, sillä  $A\bar{w}$  ei ole vektorin  $\bar{w}$  virittämällä suoralla.

4 kertominen on sama asia kuin skalaarimatriisilla  $4I = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$  kertominen. Siten  $4\bar{v} = 4I\bar{v}$ . Nyt yhtälö saadaan muotoon  $A\bar{v} - 4I\bar{v} = \bar{0}$ , josta seuraa

$$(A - 4I)\bar{v} = \bar{0}.$$

Sijoitetaan yhtälöön matriisi  $A$ :

$$\left( \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Nyt yhtälö sievenee muotoon

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Päädytään siis ratkaisemaan yhtälöryhmä

$$\begin{cases} -v_1 + v_2 = 0 \\ v_1 - v_2 = 0 \end{cases}$$

Muutetaan yhtälöryhmän matriisi porrasmuotoon:

$$\left[ \begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{R_2+R_1} \left[ \begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{(-1)\cdot R_1} \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

Merkitään  $v_2 = t$ . Nyt  $v_1 = v_2 = t$ . Siten yhtälön ratkaisu on

$$\begin{cases} v_1 = t \\ v_2 = t, \end{cases} \text{ missä } t \in \mathbb{R}.$$

Nollavektoria ei kuitenkaan määritelmän mukaan kelpuuteta ominaisvektoriksi. Siten ominaisarvoa 4 vastaavat ominaisvektorit ovat muotoa  $(t, t)$ , missä  $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

## 12.2 Ominaisarvojen löytäminen

Ominaisarvojen ja ominaisvektoreiden löytäminen perustuu yhtälön

$$A\bar{v} - \lambda\bar{v} = \bar{0} \quad (8)$$

ratkaisemiseen. Ominaisvektoria  $\bar{v}$  ei kuitenkaan voida ratkaista ennen kuin tunnetaan ominaisarvo  $\lambda$ . Sen löytämiseksi muutetaan yhtälö hieman toiseen muotoon samaan tapaan kuin esimerkissä 12.3. Ensinnäkin huomataan, että  $\lambda\bar{v} = \lambda I\bar{v}$ , missä  $I$  on ykkösmatriisi. Näin ollen

$$A\bar{v} - \lambda\bar{v} = A\bar{v} - \lambda I\bar{v} = (A - \lambda I)\bar{v}.$$

Nyt yhtälö (8) tulee muotoon

$$(A - \lambda I)\bar{v} = \bar{0}. \quad (9)$$

Yhtälöä (9) vastaa homogeeninen yhtälöryhmä, joten sillä on aina triviaaliratkaisu  $\bar{v} = \bar{0}$ . Tämä ei kuitenkaan kelpaa ominaisvektoriksi, joten tavoitteena on löytää jokin epätriviaali ratkaisu. Lauseen 10.7 nojalla yhtälöllä on epätriviaaleja ratkaisuja täsmälleen silloin, kun kerroinmatriisi  $A - \lambda I$  ei ole kääntyvä. Toisaalta lauseen 11.3 mukaan neliömatriisi ei ole kääntyvä täsmälleen silloin, kun sen determinantti on 0. Näin saadaan seuraava lause.

**Lause 12.4.** *Reaaliluku  $\lambda$  on neliömatriisin  $A$  ominaisarvo, jos ja vain jos*

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

**Esimerkki 12.5.** Määritetään matriisin

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

ominaisarvot ja niitä vastaavat ominaisvektorit. Lähdetään liikkeelle laskemalla lauseessa 12.4 mainittu determinantti:

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ 3 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)(2 - \lambda) - 6 \\ &= 2 - \lambda - 2\lambda + \lambda^2 - 6 = \lambda^2 - 3\lambda - 4, \end{aligned}$$

Matriisin  $A$  ominaisarvot ovat nyt yhtälön  $\lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0$  ratkaisut. Toisen asteen ratkaisukaavan avulla saadaan yhtälön ratkaisuksi  $\lambda = 4$  ja  $\lambda = -1$ . Siten matriisin ominaisarvot ovat  $\lambda_1 = 4$  ja  $\lambda_2 = -1$ .

Määritetään vielä ominaisvektorit. Kumpaakin ominaisarvoa vastaavat omat ominaisvektorinsa. Tarkastellaan ensin ominaisarvoa  $\lambda_1 = 4$ . Tällöin ratkaistavana on yhtälö  $(A - 4I)\bar{v} = \bar{0}$ . Ratkaistavaksi saadaan siis yhtälöryhmä, jota vastaa matriisi

$$\left[ \begin{array}{cc|c} -3 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \end{array} \right].$$

Kun yhtälöryhmä ratkaistaan Gaussin-Jordanin eliminointimenetelmällä, ratkaisun nähdään olevan

$$\begin{cases} x_1 = (2/3)t \\ x_2 = t, \end{cases} \text{ missä } t \in \mathbb{R}.$$

Ominaisarvoa 4 vastaavat ominaisvektorit ovat siis muotoa  $((2/3)t, t)$ , missä  $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

Tarkastellaan sitten ominaisarvoa  $\lambda_2 = -1$ . Nyt ratkaistavana oleva yhtälö on  $(A + I)\bar{v} = \bar{0}$ . Sen ratkaisuksi saadaan

$$\begin{cases} x_1 = -t \\ x_2 = t, \end{cases} \text{ missä } t \in \mathbb{R}.$$

Ominaisarvoa  $-1$  vastaavat ominaisvektorit ovat siis muotoa  $(-t, t)$ , missä  $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

Lauseke  $\det(A - \lambda I)$  on eräs muuttujan  $\lambda$  polynomi. Sitä nimitetään matriisin  $A$  *karakteristiseksi polynomiksi*. Edellinen lause voidaan siis muotoilla myös niin, että matriisin  $A$  ominaisarvot ovat sen karakteristisen polynomin nollakohdat.

*Huom.* Jos matriisille  $A$  löytyy yksikin ominaisvektori, sillä on välttämättä äärettömän monta ominaisvektoria. Jokainen ominaisvektorin  $\bar{v}$  skalaarimonikerta nollavektoria lukuunottamatta on nimittäin myös ominaisvektori, sillä  $A(c\bar{v}) = c(A\bar{v}) = c(\lambda\bar{v}) = \lambda(c\bar{v})$  kaikilla  $c \in \mathbb{R}$ .

Ominaisarvoja voi sen sijaan olla vain äärellisen monta.

**Lause 12.6.** *Jos  $A$  on  $n \times n$ -matriisi, sillä on korkeintaan  $n$  ominaisarvoa.*

*Todistus.* Koska  $A$  on  $n \times n$ -matriisi, sen karakteristinen polynomi on korkeintaan astetta  $n$ . Karakteristinen polynomi on siis muotoa  $c_0 + c_1\lambda + \dots + c_n\lambda^n$ , missä  $c_0, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ . Voidaan osoittaa, että yhtälöllä

$$c_0 + c_1\lambda + \dots + c_n\lambda^n = 0$$

on enintään  $n$  eri ratkaisua. (Tämä tehdään esimerkiksi kurssilla Algebra I.) Näin ollen matriisilla  $A$  on enintään  $n$  eri ominaisarvoa.  $\square$

## 12.3 Diagonalisointi

**Määritelmä 12.7.** Neliömatriisia  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  kutsutaan *diagonalisoituvaksi*, jos on olemassa kääntyvä matriisi  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  ja lävistäjämatriisi  $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , joille pätee

$$P^{-1}AP = D.$$

**Esimerkki 12.8.** Osoitetaan, että matriisi

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

on diagonalisoituva. Valitaan

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Matriisin  $P$  käänteismatriisi saadaan esimerkiksi lauseen 9.13 avulla, ja se on

$$P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Nyt nähdään, että

$$P^{-1}AP = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Määritelmässä vaadittu lävistäjämatriisi on siis

$$D = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Esimerkissä 12.8 matriisi  $P$  vain tupsahti jostakin. Huomataan kuitenkin, että matriisin  $D$  lävistäjäälkiot ovat matriisin  $A$  ominaisarvoja ja matriisin  $P$  sarakkeet niitä vastaavia ominaisvektoreita. Seuraava lause osoittaa, että näin on aina, jos matriisi on diagonalisoituva.

**Lause 12.9.** *Neliömatriisi  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  on diagonalisoituva, jos ja vain jos sillä on  $n$  lineaarisesti riippumatonta ominaisvektoria. Tällöin*

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix},$$

missä matriisin  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  sarakkeet koostuvat matriisin  $A$  lineaarisesti riippumattomista ominaisvektoreista ja  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  ovat niitä vastaavat ominaisarvot samassa järjestyksessä.

*Todistus.* " $\Rightarrow$ ": Oletetaan, että  $P^{-1}AP = D$ , missä  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  on jokin kääntyvä matriisi ja  $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$  lävistäjämatriisi. Nyt  $AP = PD$ . Olkoot matriisin  $P$  sarakkeet  $\bar{p}_1, \dots, \bar{p}_n$  ja matriisin  $D$  lävistäjäälkiot  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ . Nyt siis

$$P = [\bar{p}_1 \quad \cdots \quad \bar{p}_n] \quad \text{ja} \quad D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Matriisituloa laskettaessa tulon  $AP$  jokainen sarake saadaan kertomalla matriisilla  $A$  vastaava sarake matriisista  $P$ :

$$AP = A[\bar{p}_1 \cdots \bar{p}_n] = [A\bar{p}_1 \cdots A\bar{p}_n].$$

Toisaalta lävistäjämatriisilla  $D$  kerrottaessa tullaan kertoneeksi jokainen sarake vastaavalla lävistäjäälkioilla:

$$PD = [\lambda_1\bar{p}_1 \cdots \lambda_n\bar{p}_n].$$

Koska  $AP = PD$ , nähdään nyt, että  $A\bar{p}_i = \lambda_i\bar{p}_i$  kaikilla  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Siis jokainen  $\lambda_i$  on ominaisarvo ja  $\bar{p}_i$  sitä vastaava ominaisvektori.

On vielä osoitettava, että ominaisvektorien jono  $(\bar{p}_1, \dots, \bar{p}_n)$  on vapaa. Koska  $P$  on kääntyvä, yhtälöllä  $P\bar{x} = \bar{0}$  on lauseen 10.1 mukaan täsmälleen yksi ratkaisu  $\bar{x} = \bar{0}$ . Yhtälö  $P\bar{x} = \bar{0}$  voidaan kirjoittaa myös muotoon

$$x_1\bar{p}_1 + x_2\bar{p}_2 + \dots + x_n\bar{p}_n = \bar{0}.$$

Tämän yhtälön ainoa ratkaisu on siis  $x_1 = 0, \dots, x_n = 0$ . Näin ollen matriisin  $A$  ominaisvektoreiden jono  $(\bar{p}_1, \dots, \bar{p}_n)$  on vapaa.

” $\Leftarrow$ ”: Oletetaan, että  $\bar{p}_1, \dots, \bar{p}_n$  ovat jotkin matriisin  $A$  lineaarisesti riippumattomat ominaisvektorit. Olkoot niitä vastaavat ominaisarvot  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ . Nyt  $A\bar{p}_i = \lambda_i\bar{p}_i$  kaikilla  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Olkoon  $P$  matriisi, jonka sarakkeet ovat ominaisvektorit:  $P = [\bar{p}_1 \dots \bar{p}_n]$ . Olkoon  $D$  puolestaan lävistäjämatriisi, jonka lävistäjäalkiot ovat  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ . Tällöin nähdään samaan tapaan kuin edellä, että  $AP = PD$ .

Koska matriisin  $P$  sarakkeet ovat lineaarisesti riippumattomat, on yhtälöllä  $P\bar{x} = \bar{0}$  täsmälleen yksi ratkaisu  $\bar{x} = \bar{0}$ . (Tämä nähdään samalla tavalla kuin todistuksen ensimmäisessä osassa.) Lauseen 10.7 nojalla matriisi  $P$  on nyt kääntyvä. Yhtälö  $AP = PD$  saadaan siis muotoon

$$P^{-1}AP = D. \quad \square$$

**Esimerkki 12.10.** Tutkitaan, onko esimerkin 12.5 matriisi

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

diagonalisoituva. Esimerkissä 12.5 todettiin, että matriisin ominaisarvot ovat 4 ja  $-1$ . Eräät näitä ominaisarvoja vastaavat ominaisvektorit ovat  $(2, 3)$  ja  $(-1, 1)$ . Nämä ominaisvektorit ovat lineaarisesti riippumattomat, sillä ne eivät ole yhdensuuntaiset. Lauseen 12.9 perusteella  $A$  on diagonalisoituva. Muodostetaan ominaisvektoreista matriisi

$$P = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

ja ominaisarvoista matriisi

$$D = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Nyt lauseen 12.9 nojalla pätee  $P^{-1}AP = D$ . Tämän voi vielä tarkistaa laskemalla.

**Esimerkki 12.11.** Diagonalisoidaan matriisi

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},$$

jos mahdollista. Selvitetään aluksi matriisin ominaisarvot. Matriisin karakteristinen polynomi on  $(\lambda - 2)^2$ , ja tämän polynomin ainoa nollakohta on 2. Siten ominaisarvoja on yksi, ja se on 2.

Ominaisarvoa vastaavat ominaisvektorit saadaan yhtälöstä  $A\bar{x} = 2\bar{x}$ . Kun yhtälö ratkaistaan, nähdään sen ratkaisujen olevan muotoa  $\bar{x} = (t, 0)$ , missä  $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Matriisilla  $A$  ei siis ole kahta lineaarisesti riippumatonta ominaisarvoa, joten  $A$  ei ole diagonalisoituva.

**Esimerkki 12.12** (Diagonalisoituvan matriisin potenssit). Lasketaan esimerkissä 12.8 esiintyneen matriisin  $A$  seitsemäs potenssi. Suora matriisikertolasku olisi työläs suorittaa, mutta koska matriisi  $A$  on diagonalisoituva, voidaan käyttää hyväksi sen ominaisarvoja.

Esimerkissä 12.8 todettiin, että  $P^{-1}AP = D$ , missä

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad D = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Lävistäjämatrisiin potensseja on vaikeampi laskea. Huomataan, että

$$D^7 = \begin{bmatrix} 4^7 & 0 \\ 0 & 2^7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16384 & 0 \\ 0 & 128 \end{bmatrix}.$$

(Vastaava pätee kaikille neliömatriiseille.)

Toisaalta, jos kerrotaan yhtälöä  $P^{-1}AP = D$  vasemmalta matriisilla  $P$  ja oikealta matriisilla  $P^{-1}$ , saadaan  $A = PDP^{-1}$ . Nyt voidaan laskea

$$\begin{aligned} A^7 &= (PDP^{-1})^7 \\ &= \underbrace{(PDP^{-1})(PDP^{-1}) \dots (PDP^{-1})(PDP^{-1})}_{7 \text{ kpl}} \\ &= PD(P^{-1}P)D \dots (P^{-1}P)DP^{-1} \\ &= P \underbrace{D \dots D}_{7 \text{ kpl}} P^{-1} \\ &= PD^7P^{-1}. \end{aligned}$$

Siten

$$\begin{aligned} A^7 &= (PDP^{-1})^7 = PD^7P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 16384 & 0 \\ 0 & 128 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 16384 & 128 \\ 16384 & -128 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 16512 & 16256 \\ 16256 & 16512 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8256 & 8128 \\ 8128 & 8256 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Matriisipotenssin laskeminen saatiin muutettua pariaksi matriisikertolaskuksi sekä tavallisten kokonaislukujen potenssiksi. Samalla vaivalla voitaisiin laskea paljon suurempiakin potensseja. Tämä temppu onnistuu kuitenkin vain, jos alkuperäinen matriisi on diagonalisoituva.

Neliömatriisi  $A$  on *similaarinen* matriisiin  $B$  kanssa, jos on olemassa kääntyvä matriisi  $P$ , jolle pätee  $P^{-1}AP = B$ . Diagonalisoituvat matriisit ovat siis similaarisia lävistäjämatrisiin kanssa. Similaariset matriisit muistuttavat monessa suhteessa toisiaan. Niillä on muun muassa samat ominaisarvot ja sama determinantti.



Palataan vielä tutkimaan matriisin ominaisvektoreita. Seuraava lause osoittaa, että eri ominaisarvoja vastaavat ominaisvektorit ovat lineaarisesti riippumattomia. Tästä tuloksesta on toisinaan hyötyä, kun tutkitaan, onko matriisi diagonalisoituva.

**Lause 12.13.** *Oletetaan, että  $A$  on  $n \times n$ -matriisi. Oletetaan, että  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  ovat matriisin  $A$  eri ominaisarvoja ja  $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_m \in \mathbb{R}^n$  jotkin niitä vastaavat ominaisvektorit. Tällöin jono  $(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_m)$  on vapaa.*

*Todistus.* Oletetaan vastoin väitettä, että jono  $(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_m)$  on sidottu. Nyt lauseen 7.8 nojalla jokin jonon vektoreista on muiden lineaarikombinaatio. Tästä seuraa, että jokin jonon vektoreista on sitä edeltävien jonon vektoreiden lineaarikombinaatio. Olkoon  $\bar{v}_{k+1}$  jonon ensimmäinen vektori, joka on sitä edeltävien vektoreiden lineaarikombinaatio. Tällöin on olemassa reaali- $c_1, \dots, c_k$ , joille pätee

$$c_1 \bar{v}_1 + \dots + c_k \bar{v}_k = \bar{v}_{k+1}. \quad (10)$$

Lisäksi jono  $(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k)$  on vapaa. Jos se nimittäin ei olisi vapaa,  $\bar{v}_{k+1}$  ei olisikaan ensimmäinen vektori, joka on sitä edeltävien vektoreiden lineaarikombinaatio.

Kertomalla yhtälön (10) molemmat puolet vasemmalta matriisilla  $A$  saadaan yhtälö

$$A(c_1 \bar{v}_1 + \dots + c_k \bar{v}_k) = A\bar{v}_{k+1}.$$

Matriisien laskusääntöjen avulla yhtälö saa muodon  $c_1 A\bar{v}_1 + \dots + c_k A\bar{v}_k = A\bar{v}_{k+1}$ . Kun vielä muistetaan, että vektorit  $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k$  ovat matriisin  $A$  ominaisvektoreita, saadaan lopulta yhtälö

$$c_1 \lambda_1 \bar{v}_1 + \dots + c_k \lambda_k \bar{v}_k = \lambda_{k+1} \bar{v}_{k+1}. \quad (11)$$

Toisaalta voidaan kertoa yhtälön (10) molemmat puolet luvulla  $\lambda_{k+1}$  päätyen yhtälöön

$$c_1 \lambda_{k+1} \bar{v}_1 + \dots + c_k \lambda_{k+1} \bar{v}_k = \lambda_{k+1} \bar{v}_{k+1}. \quad (12)$$

Vähennetään yhtälöstä (11) puolittain yhtälö (12), jolloin saadaan

$$c_1(\lambda_1 - \lambda_{k+1})\bar{v}_1 + \dots + c_k(\lambda_k - \lambda_{k+1})\bar{v}_k = \bar{0}.$$

Jono  $(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k)$  on vapaa, joten kaikkien yhtälössä olevien kertoimien on oltava nollia:

$$c_1(\lambda_1 - \lambda_{k+1}) = 0, c_2(\lambda_2 - \lambda_{k+1}) = 0, \dots, c_k(\lambda_k - \lambda_{k+1}) = 0.$$

Koska  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  ovat kaikki eri ominaisarvoja, niin tiedetään, että  $(\lambda_i - \lambda_{k+1}) \neq 0$  kaikilla  $i \in \{1, \dots, k\}$ . Tulon nollasäännön nojalla

$$c_1 = 0, c_2 = 0, \dots, c_k = 0.$$

Näin ollen

$$\bar{v}_{k+1} = c_1 \bar{v}_1 + \dots + c_k \bar{v}_k = 0\bar{v}_1 + \dots + 0\bar{v}_k = \bar{0}.$$

Toisaalta oletuksen mukaan  $\bar{v}_{k+1}$  on matriisin  $A$  ominaisvektori, joten  $\bar{v}_{k+1} \neq \bar{0}$ . Koska päädyttiin ristiriitaan, vastaoletus ei voi olla tosi. Siis alkuperäinen väite pätee, eli jono  $(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_m)$  on vapaa.  $\square$

Edellisestä lauseesta seuraa, että toisinaan matriisin diagonalisoituvuus on helppo todeta.

**Korollaari 12.14.** *Oletetaan, että  $n \times n$ -matriisilla on  $n$  eri ominaisarvoa. Tällöin  $A$  on diagonalisoituva.*

*Todistus.* Olkoot  $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n$  jotkin eri ominaisarvoihin liittyvät ominaisvektorit. Ne ovat lineaarisesti riippumattomia lauseen 12.13 nojalla. Koska matriisilla  $A$  on  $n$  lineaarisesti riippumattonta ominaisvektoria, on  $A$  diagonalisoituva lauseen 12.9 nojalla.  $\square$

Huomaa, että diagonalisoituvan  $n \times n$ -matriisin ominaisarvojen lukumäärän ei tarvitse olla  $n$ . Esimerkiksi lävistäjämatriisi

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$$

on diagonalisoituva, sillä  $I^{-1}AI = A$ . Kuitenkin karakteristisen polynomin avulla nähdään, että matriisilla on vain yksi ominaisarvo,  $-3$ .

## 13 Pistetulo

Avaruuksissa  $\mathbb{R}^2$  ja  $\mathbb{R}^3$  on totuttu puhumaan vektorien pituuksista ja vektoreiden välisistä kulmista. Kuten tavallista, näiden käsitteiden yleistäminen korkeampiulotteisiin avaruuksiin ei välttämättä onnistu pelkästään geometrisen intuition avulla. Kuitenkin esimerkiksi Pythagoraan lauseen voidaan ajatella toimivan kaikissa ulottuvuuksissa samalla tavalla. Kyseinen lause, samoin kuin muutkin vektoreiden pituuksiin ja kulmiin liittyvät käsitteet, voidaan ilmaista pistetulon avulla, ja pistetulo puolestaan voidaan laskea avaruudessa  $\mathbb{R}^n$ , oli  $n$  miten suuri tahansa.

**Määritelmä 13.1.** Vektoreiden  $\bar{v} = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$  ja  $\bar{w} = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{R}^n$  pistetulo on

$$\bar{v} \cdot \bar{w} = v_1 w_1 + v_2 w_2 + \dots + v_n w_n.$$

Vektorien pistetulo on aina reaalityyppinen. Jos esimerkiksi  $\bar{v} = (3, -2, 0)$  ja  $\bar{w} = (1, -2, \sqrt{3})$ , vektorien  $\bar{v}$  ja  $\bar{w}$  pistetulo on

$$\bar{v} \cdot \bar{w} = 3 \cdot 1 + (-2)(-2) + 0 \cdot \sqrt{3} = 7.$$

Pistetulolle voidaan johtaa laskusääntöjä.

**Lause 13.2.** Oletetaan, että  $\bar{v}, \bar{w}, \bar{u} \in \mathbb{R}^n$  ja  $c \in \mathbb{R}$ . Tällöin

- a)  $\bar{v} \cdot \bar{w} = \bar{w} \cdot \bar{v}$
- b)  $\bar{v} \cdot (\bar{w} + \bar{u}) = \bar{v} \cdot \bar{w} + \bar{v} \cdot \bar{u}$
- c)  $(c\bar{v}) \cdot \bar{w} = c(\bar{v} \cdot \bar{w})$ .

*Todistus.* Todistetaan vain kohta b) ja jätetään loput kohdat harjoitustehtäviksi. Merkitään  $\bar{v} = (v_1, \dots, v_n)$ ,  $\bar{w} = (w_1, \dots, w_n)$  ja  $\bar{u} = (u_1, \dots, u_n)$ . Nyt nähdään, että

$$\begin{aligned} \bar{v} \cdot (\bar{w} + \bar{u}) &= (v_1, \dots, v_n) \cdot (w_1 + u_1, w_2 + u_2, \dots, w_n + u_n) \\ &= v_1(w_1 + u_1) + v_2(w_2 + u_2) + \dots + v_n(w_n + u_n) \\ &= v_1 w_1 + v_1 u_1 + v_2 w_2 + v_2 u_2 + \dots + v_n w_n + v_n u_n \\ &= (v_1 w_1 + v_2 w_2 + \dots + v_n w_n) + (v_1 u_1 + v_2 u_2 + \dots + v_n u_n) \\ &= \bar{v} \cdot \bar{w} + \bar{v} \cdot \bar{u}. \end{aligned}$$

Tässä käytettiin reaalityyppisten yhteenlaskun ja kertolaskun osittelulakia. □

*Huom.* Kohdan b) osittelulaki pätee myös toisin päin:  $(\bar{v} + \bar{w}) \cdot \bar{u} = \bar{v} \cdot \bar{u} + \bar{w} \cdot \bar{u}$ . Tämä seuraa kohdasta a), jonka mukaan pistetulo on vaihdannainen:

$$(\bar{v} + \bar{w}) \cdot \bar{u} \stackrel{a)}{=} \bar{u} \cdot (\bar{v} + \bar{w}) \stackrel{b)}{=} \bar{u} \cdot \bar{v} + \bar{u} \cdot \bar{w} \stackrel{a)}{=} \bar{v} \cdot \bar{u} + \bar{w} \cdot \bar{u}.$$

Samaan tapaan myös c)-kohta voidaan kääntää muotoon  $\bar{v} \cdot (c\bar{w}) = c(\bar{v} \cdot \bar{w})$ .

Seuraava lause osoittaa, että vektorin pistetulo itsensä kanssa on aina epänegatiivinen. Ainoastaan nollavektorin pistetulo itsensä kanssa on nolla.

**Lause 13.3.** Oletetaan, että  $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$ . Tällöin

- a)  $\bar{v} \cdot \bar{v} \geq 0$   
 b)  $\bar{v} \cdot \bar{v} = 0$ , jos ja vain jos  $\bar{v} = \bar{0}$ .

*Todistus.*

- a) Nähdään, että  $\bar{v} \cdot \bar{v} = v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2 \geq 0 + 0 + \dots + 0 = 0$ , sillä reaaliluvun neliö on aina epänegatiivinen. Tämä todistaa väitteen.
- b) " $\Rightarrow$ ": Oletetaan, että  $\bar{v} \cdot \bar{v} = 0$ . Tällöin  $v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2 = 0$ . Koska jokainen yhteenlaskettava on epänegatiivinen, täytyy yhteenlaskettavien olla nollia. Toisin sanoen  $v_i^2 = 0$  kaikilla  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Tästä seuraa, että  $v_i = 0$  kaikilla  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Siten  $\bar{v} = (0, 0, \dots, 0) = \bar{0}$ .
- " $\Leftarrow$ ": Oletetaan, että  $\bar{v} = \bar{0}$ . Nyt  $\bar{v} \cdot \bar{v} = 0^2 + 0^2 + \dots + 0^2 = 0$ . Väite on todistettu.  $\square$

### 13.1 Vektorin normi

Pistetulon avulla voidaan määritellä avaruuden  $\mathbb{R}^n$  vektorin normi eli pituus. Lauseen 13.3 nojalla pätee  $\bar{v} \cdot \bar{v} \geq 0$ , joten seuraavassa määritelmässä juurrettava on epänegatiivinen, kuten kuuluu olla.

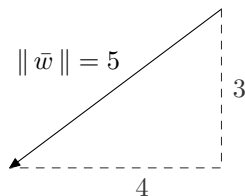
**Määritelmä 13.4.** Vektorin  $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$  normi eli pituus on

$$\|\bar{v}\| = \sqrt{\bar{v} \cdot \bar{v}}.$$

Määritelmästä seuraa, että  $\|\bar{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2}$ , kun pistetulo lasketaan auki. Esimerkiksi vektorin  $\bar{v} = (1/2, 3, -2, 0)$  normi on

$$\|\bar{v}\| = \sqrt{(1/2)^2 + 3^2 + (-2)^2 + 0^2} = \sqrt{\frac{53}{4}} = \frac{\sqrt{53}}{2}.$$

Tasossa normia voi havainnollistaa Pythagoraan lauseen avulla. Kuvaan 13.29 on piirretty vektori  $\bar{w} = (-4, -3)$ . Pythagoraan lausetta käyttäen sen pituudeksi saadaan  $\sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$ . Pituuden geometrinen tulkinta antaa siis saman tuloksen kuin normin määritelmä.



Kuva 13.29: Vektorin  $\bar{w} = (-4, -3)$  normi eli pituus on 5.

Seuraava lause ilmaisee normien avulla sen, että vektorin pituus on aina epänegatiivinen ja nollavektori on ainoa vektori, jonka pituus on nolla.

**Lause 13.5.** Oletetaan, että  $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$ . Tällöin

- a)  $\|\bar{v}\| \geq 0$
- b)  $\|\bar{v}\| = 0$ , jos ja vain jos  $\bar{v} = \bar{0}$ .

*Todistus.* Tulokset seuraavat suoraan normin määritelmästä, neliöjuuren ominaisuuksista ja lauseesta 13.3.

- a) Määritelmän mukaan  $\|\bar{v}\| = \sqrt{\bar{v} \cdot \bar{v}}$ . Neliöjuuren arvo on aina epänegatiivinen, joten  $\|\bar{v}\| \geq 0$ .
- b) Huomataan, että  $\|\bar{v}\| = \sqrt{\bar{v} \cdot \bar{v}} = 0$ , jos ja vain jos juuretettava  $\bar{v} \cdot \bar{v}$  on nolla. Lauseen 13.3 nojalla taas  $\bar{v} \cdot \bar{v} = 0$ , jos ja vain jos  $\bar{v} = \bar{0}$ . Tämä todistaa väitteen.  $\square$

Kun vektoria kerrotaan skalaarilla, tavallisinta on sanoa, että vektorin suunta pysyy samana, mutta sen pituutta ”skaalataan”. Tähän asti kyse on ollut vain intuitiivisesta kuvailusta, mutta normin käsitteen avulla asia voidaan ilmaista tarkasti. On vain otettava huomioon, että pituus on aina epänegatiivinen, vaikka skalaarikerroin olisikin negatiivinen.

**Lause 13.6.** Oletetaan, että  $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$  ja  $c \in \mathbb{R}$ . Tällöin  $\|c\bar{v}\| = |c|\|\bar{v}\|$ .

*Todistus.* Pistetulon ominaisuuksien perusteella

$$\|c\bar{v}\| = \sqrt{(c\bar{v}) \cdot (c\bar{v})} = \sqrt{c(\bar{v} \cdot (c\bar{v}))} = \sqrt{c^2(\bar{v} \cdot \bar{v})} = |c|\sqrt{\bar{v} \cdot \bar{v}} = |c|\|\bar{v}\|. \quad \square$$

Jos vain vektorin suunnalla on merkitystä, pyritään usein yksinkertaisuuden vuoksi rajoittumaan vektoreihin, joiden pituus on yksi. Tällaisilla vektoreilla on oma nimityksensä.

**Määritelmä 13.7.** Vektori  $\bar{u} \in \mathbb{R}^n$  on *yksikkövektori*, jos sen normi on yksi eli

$$\|\bar{u}\| = 1.$$

*Huom.* Vektoreita  $\bar{i} = (1, 0)$  ja  $\bar{j} = (0, 1)$  kutsutaan toisinaan tason yksikkövektoreiksi. Koska niiden pituus on 1, ne ovat kuin ovatkin yksikkövektoreita myös yllä olevan määritelmän mukaan, samoin kuin kaikki luonnollisen kannan vektorit  $\bar{e}_i \in \mathbb{R}^n$ . On kuitenkin olemassa muitakin yksikkövektoreita, kuten seuraava esimerkki osoittaa.

**Esimerkki 13.8.** Etsitään jokin yksikkövektori, joka on yhdensuuntainen annetun vektorin  $\bar{v} = (2, -1, 0)$  kanssa. Vektorin  $\bar{v}$  normi on  $\|\bar{v}\| = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$ . Jos vektori  $\bar{v}$  kerrotaan skalaarilla  $1/\sqrt{5}$ , saadaan vektori  $(1/\sqrt{5})\bar{v}$ , jonka pituus on lauseen 13.6 nojalla

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \|\bar{v}\| = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \sqrt{5} = 1.$$

Vektori  $(1/\sqrt{5})\bar{v}$  on siis yksikkövektori. Lisäksi vektorit  $\bar{v}$  ja  $(1/\sqrt{5})\bar{v}$  ovat yhdensuuntaiset, koska ne eroavat vain skalaarikertoimen verran. Eräs tavoiteltu vektori on siis  $(1/\sqrt{5})\bar{v}$ .

Edellistä esimerkkiä mukaillen saadaan seuraava yleinen tulos.

**Lause 13.9.** Oletetaan, että  $\bar{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\bar{0}\}$ . Tällöin vektori  $\frac{1}{\|\bar{v}\|}\bar{v}$  on yksikkövektori, joka on samansuuntainen vektorin  $\bar{v}$  kanssa.

Kun vektorit  $\bar{v}$  ja  $\bar{w}$  tulkitaan tason pisteiksi, niiden välinen etäisyys voidaan määrittellä niitä yhdistävän suuntaajanan  $\bar{v} - \bar{w}$  pituutena. Tämä taas palautuu vektorin normiin.

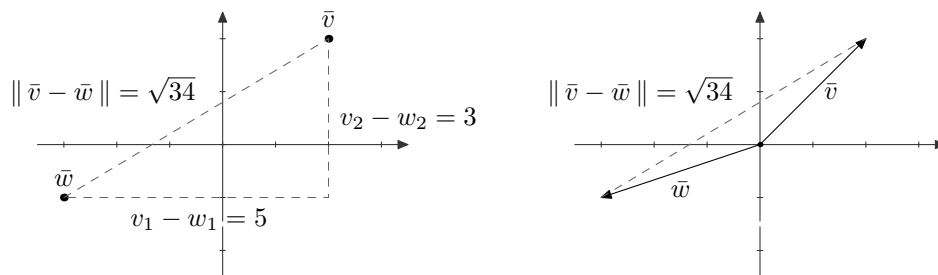
**Määritelmä 13.10.** Oletetaan, että  $\bar{v}, \bar{w} \in \mathbb{R}^n$ . Vektorien  $\bar{v}$  ja  $\bar{w}$  välinen *etäisyys* on

$$d(\bar{v}, \bar{w}) = \|\bar{v} - \bar{w}\|.$$

**Esimerkki 13.11.** Vektoreiden  $\bar{v} = (2, 2)$  ja  $\bar{w} = (-3, -1)$  välinen etäisyys on

$$d(\bar{v}, \bar{w}) = \|\bar{v} - \bar{w}\| = \|(2 - (-3), 2 - (-1))\| = \|(5, 3)\| = \sqrt{5^2 + 3^2} = \sqrt{34}.$$

Etäisyyttä on havainnollistettu kahdella eri tavalla kuvassa 13.30.



Kuva 13.30: Vektoreiden  $\bar{v}$  ja  $\bar{w}$  välinen etäisyys. Ensimmäisessä kuvassa vektorit on havainnollistettu tason pisteinä, jälkimmäisessä kuvassa paikkavektoreina.

## 13.2 Vektorien kohtisuoruus ja projektiio

Pituuden lisäksi pistetulon avulla voidaan määrittellä vektorien välinen kulma. Tarkastellaan aluksi yksinkertaisinta eli suoraa kulmaa.

**Määritelmä 13.12.** Vektorit  $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$  ja  $\bar{w} \in \mathbb{R}^n$  ovat *kohtisuorassa toisiaan vastaan* eli *ortogonaaliset*, jos  $\bar{v} \cdot \bar{w} = 0$ . Tällöin merkitään  $\bar{v} \perp \bar{w}$ .

Esimerkiksi tason vektorit  $(2, 1)$  ja  $(-2, 4)$  ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan, sillä

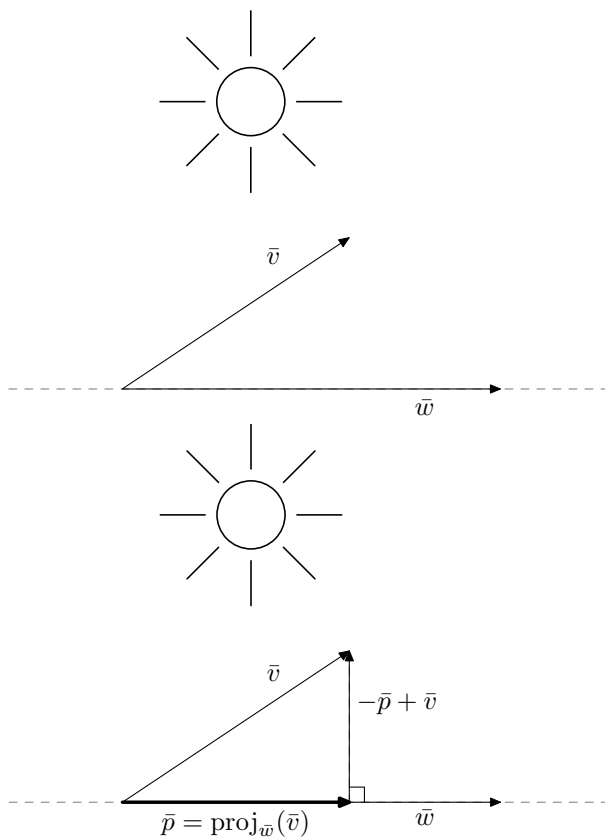
$$(2, 1) \cdot (-2, 4) = 2 \cdot (-2) + 1 \cdot 4 = 0.$$

Voidaan siis merkitä  $(2, 1) \perp (-2, 4)$ .

Kohtisuoruuden käsite tarjoaa mahdollisuuden määrittellä vektorin *projektiio*. Tätä voidaan ajatella vektorin heittäjänä varjona kuvan 13.31 mukaan. Projektiio on hyödyllinen työkalu

esimerkiksi tietokonegrafikassa ja geometriassa (ks. esim. 13.21), mutta sillä on myös teoreettiset sovelluksensa. Projektiota tarkastellaan lähemmin kurssin toisessa osassa. Tässä rajoitumme vektorin projektioon jonkin toisen vektorin virittämälle aliavaruudelle (eli suoralle).

Palataan vielä varjovertaukseen. Voidaan ajatella, että vektorin  $\bar{v}$  projektio vektorin  $\bar{w}$  suunnaiselle suoralle on vektorin  $\bar{v}$  heittäminen varjo, kun aurinko paistaa kohtisuoraan suoraa vastaan kuten kuvassa 13.31. Matemaattisesti tämä voidaan ilmaista sanomalla, että projektio  $\bar{p}$  on yhdensuuntainen vektorin  $\bar{w}$  kanssa ja vektorit  $\bar{w}$  sekä  $-\bar{p} + \bar{v}$  ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan.



Kuva 13.31: Projektiota voi ajatella vektorin heittämänä varjona.

**Määritelmä 13.13.** Olkoot  $\bar{v}, \bar{w} \in \mathbb{R}^n$  ja  $\bar{w} \neq \bar{0}$ . Tällöin vektorin  $\bar{v}$  *projektio* vektorin  $\bar{w}$  virittämälle aliavaruudelle on sellainen vektori  $\bar{p} \in \mathbb{R}^n$ , että

- vektori  $\bar{p}$  on yhdensuuntainen vektorin  $\bar{w}$  kanssa
- vektori  $\bar{v} - \bar{p}$  on kohtisuorassa vektoria  $\bar{w}$  vastaan.

Projektiota  $\bar{p}$  merkitään  $\text{proj}_{\bar{w}}(\bar{v})$ .

Määritelmän ensimmäinen kohta tarkoittaa, että  $\bar{p}$  on suoralla, jonka suuntavektori on  $\bar{w}$ . Jälkimmäinen kohta puolestaan takaa, että projisointi on tapahtunut kohtisuoraan. Projektion laskeminen määritelmästä lähtien on hankalaa, joten johdetaan sille heti käytännöllinen laskukaava.

**Lause 13.14.** *Olkoot  $\bar{v}, \bar{w} \in \mathbb{R}^n$  ja  $\bar{w} \neq \bar{0}$ . Tällöin on olemassa täsmälleen yksi projektio  $\text{proj}_{\bar{w}}(\bar{v})$  ja se saadaan kaavasta*

$$\text{proj}_{\bar{w}}(\bar{v}) = \frac{\bar{v} \cdot \bar{w}}{\bar{w} \cdot \bar{w}} \bar{w}.$$

*Todistus.* Aloitetaan osoittamalla, että vektori

$$\frac{\bar{v} \cdot \bar{w}}{\bar{w} \cdot \bar{w}} \bar{w}$$

täyttää projektion määritelmässä mainitut ehdot.

Ensinnäkin huomataan, että kerroin  $(\bar{v} \cdot \bar{w})/(\bar{w} \cdot \bar{w})$  on reaaliluku, sillä vektoreiden pistetulot ovat reaalilukuja. Vektori

$$\frac{\bar{v} \cdot \bar{w}}{\bar{w} \cdot \bar{w}} \bar{w}$$

on siis vektorin  $\bar{w}$  skalaarimonikerta. Siten projektion määritelmän toinen ehto täyttyy.

Tutkitaan sitten projektion määritelmän ensimmäistä ehtoa. On osoitettava, että vektorit

$$\bar{v} - \frac{\bar{v} \cdot \bar{w}}{\bar{w} \cdot \bar{w}} \bar{w}$$

ja  $\bar{w}$  ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan. Pistetulon laskusääntöjen nojalla

$$\left( \bar{v} - \frac{\bar{v} \cdot \bar{w}}{\bar{w} \cdot \bar{w}} \bar{w} \right) \cdot \bar{w} = \bar{v} \cdot \bar{w} - \left( \frac{\bar{v} \cdot \bar{w}}{\bar{w} \cdot \bar{w}} \bar{w} \right) \cdot \bar{w} = \bar{v} \cdot \bar{w} - \frac{\bar{v} \cdot \bar{w}}{\bar{w} \cdot \bar{w}} (\bar{w} \cdot \bar{w}).$$

Pistetulosta tulee aina tulokseksi reaaliluku, joten seuraavaksi voidaan käyttää reaalilukujen laskusääntöjä:

$$\bar{v} \cdot \bar{w} - \frac{\bar{v} \cdot \bar{w}}{\bar{w} \cdot \bar{w}} (\bar{w} \cdot \bar{w}) = \bar{v} \cdot \bar{w} - \frac{(\bar{v} \cdot \bar{w})(\bar{w} \cdot \bar{w})}{\bar{w} \cdot \bar{w}} = \bar{v} \cdot \bar{w} - \bar{v} \cdot \bar{w} = 0.$$

Koska pistetuloksi saatiin nolla, ovat vektorit kohtisuorassa toisiaan vastaan. Siten

$$\bar{v} - \frac{\bar{v} \cdot \bar{w}}{\bar{w} \cdot \bar{w}} \bar{w}$$

on vektorin  $\bar{v}$  projektio vektorin  $\bar{w}$  virittämälle aliavaruudelle eli

$$\text{proj}_{\bar{w}}(\bar{v}) = \bar{v} - \frac{\bar{v} \cdot \bar{w}}{\bar{w} \cdot \bar{w}} \bar{w}.$$

Osoitetaan seuraavaksi, että projektion ehdot täyttäviä vektoreita on vain yksi. Merkitään  $\bar{p} = \text{proj}_{\bar{w}}(\bar{v})$ . Projektion määritelmän ensimmäisen kohdan perusteella  $\bar{p} = t\bar{w}$  jollakin  $t \neq 0$ .



Määritelmän toisen kohdan mukaan vektori  $\bar{v} - \bar{p}$  on kohtisuorassa vektoria  $\bar{w}$  vastaan, joten  $(\bar{v} - \bar{p}) \cdot \bar{w} = 0$ . Pistetuloksi saadaan

$$(\bar{v} - \bar{p}) \cdot \bar{w} = \bar{v} \cdot \bar{w} - \bar{p} \cdot \bar{w} = \bar{v} \cdot \bar{w} - t\bar{w} \cdot \bar{w}.$$

Päädytään yhtälöön  $\bar{v} \cdot \bar{w} - t(\bar{w} \cdot \bar{w}) = 0$ , josta saadaan ratkaistua  $t = (\bar{v} \cdot \bar{w})/(\bar{w} \cdot \bar{w})$ . Nyt siis

$$\bar{p} = t\bar{w} = \frac{\bar{v} \cdot \bar{w}}{\bar{w} \cdot \bar{w}}\bar{w}.$$

Väite on todistettu. □

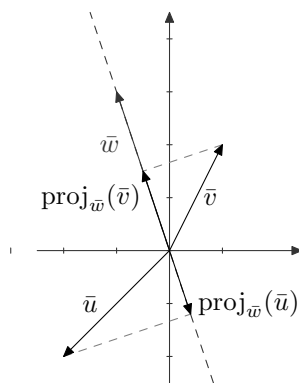
**Esimerkki 13.15.** Esimerkiksi vektorin  $\bar{v} = (1, 2)$  projektiio vektorin  $\bar{w} = (-1, 3)$  virittämälle aliavaruudelle on

$$\text{proj}_{\bar{w}}(\bar{v}) = \frac{\bar{v} \cdot \bar{w}}{\bar{w} \cdot \bar{w}}\bar{w} = \frac{5}{10}(-1, 3) = \frac{1}{2}(-1, 3) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right).$$

Vektorin  $\bar{u} = (-2, -2)$  projektiio vektorin  $\bar{w}$  virittämälle aliavaruudelle on puolestaan

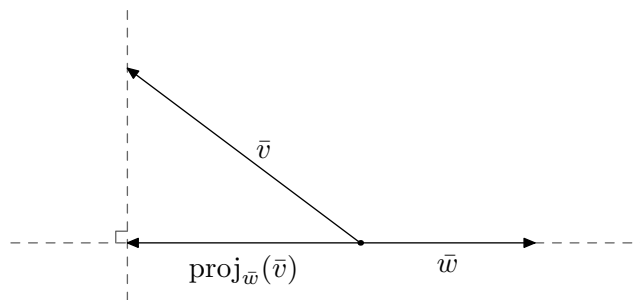
$$\text{proj}_{\bar{w}}(\bar{u}) = \frac{-4}{10}(-1, 3) = -\frac{2}{5}(-1, 3) = \left(\frac{2}{5}, -\frac{6}{5}\right).$$

Projektiot on esitetty kuvassa 13.32.



Kuva 13.32: Vektoreiden  $\bar{v}$  ja  $\bar{u}$  projektiot vektorin  $\bar{w}$  virittämälle aliavaruudelle.

Vaikka kaava on yleensä kätevin tapa määrittää vektorin projektiio, sen voi tehdä myös suoraan määritelmän perusteella geometrisesti (ks. kuva 13.33). Piirretään vektorit  $\bar{v}$  ja  $\bar{w}$  alkamaan samasta pisteestä ja piirretään vektorin  $\bar{w}$  suuntainen suora. Projektiio  $\text{proj}_{\bar{w}}(\bar{v})$  löydetään piirtämällä suora, joka on kohtisuorassa vektorin  $\bar{w}$  suuntaista suoraa vastaan ja kulkee vektorin  $\bar{v}$  kärjen kautta.



Kuva 13.33: Vektorin  $\bar{v}$  projektion määrittäminen piirtämällä.

### 13.3 Vektorien välinen kulma

Suoran kulman lisäksi pistetulo soveltuu myös muiden kulmien määrittämiseen. Ennen määritelmää tarvitaan kuitenkin pari aputulosta. Ensimmäinen on eräs yleisen teorian kannalta tärkeä tulos, jota tässä vaiheessa kuitenkin tarvitaan lähinnä sitä seuraavan lemmän todistamiseen.

**Lause 13.16** (Schwarzin epäyhtälö). *Oletetaan, että  $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$  ja  $\bar{w} \in \mathbb{R}^n$ . Tällöin*

$$|\bar{v} \cdot \bar{w}| \leq \|\bar{v}\| \|\bar{w}\|.$$

Schwarzin epäyhtälön todistus on melko tekninen, ja siksi sen esitystä lykätään kurssin toiseen osaan.

**Lemma 13.17.** *Oletetaan, että  $\bar{v}, \bar{w} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\bar{0}\}$ . Tällöin*

$$-1 \leq \frac{\bar{v} \cdot \bar{w}}{\|\bar{v}\| \|\bar{w}\|} \leq 1.$$

*Todistus.* Schwarzin epäyhtälön mukaan  $|\bar{v} \cdot \bar{w}| \leq \|\bar{v}\| \|\bar{w}\|$ . Tästä seuraa, että

$$-\|\bar{v}\| \|\bar{w}\| \leq \bar{v} \cdot \bar{w} \leq \|\bar{v}\| \|\bar{w}\|.$$

Jakamalla näin saadut epäyhtälöt positiivisella luvulla  $\|\bar{v}\| \|\bar{w}\|$  saadaan

$$-1 \leq \frac{\bar{v} \cdot \bar{w}}{\|\bar{v}\| \|\bar{w}\|} \leq 1. \quad \square$$

Nyt voidaan määritellä kahden vektorin välinen kulma. Kosinifunktio on määritelty niin, että jokaista lukua  $x \in [-1, 1]$  vastaa täsmälleen yksi sellainen kulma  $\alpha$ , että  $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$  ja  $\cos \alpha = x$ . Edellisen lemmän nojalla voidaan siis asettaa seuraava määritelmä.

**Määritelmä 13.18.** Vektorien  $\bar{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\bar{0}\}$  ja  $\bar{w} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\bar{0}\}$  välinen *kulma* on se kulma  $\alpha$ , jolle pätee  $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$  ja

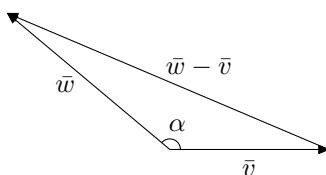
$$\cos \alpha = \frac{\bar{v} \cdot \bar{w}}{\|\bar{v}\| \|\bar{w}\|}.$$

Esimerkiksi vektorien  $\bar{v} = (3, -2, 0)$  ja  $\bar{w} = (1, -2, \sqrt{3})$  välinen kulma  $\alpha$  saadaan yhtälöstä

$$\cos \alpha = \frac{7}{\sqrt{13}\sqrt{8}}.$$

Lisäksi täytyy päteä  $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$ . Laskimella saadaan vektorien välisen kulman likiarvoksi  $\alpha \approx 46,65^\circ$ .

*Määritelmän tausta.* Vaikka määritelmiä ei tarvitsekaan perustella mitenkään, on kuitenkin valaisevaa katsoa, miten vektorien välisen kulman määritelmä vastaa tasossa geometrista käsitystämme.



Kuva 13.34: Vektoreiden  $\bar{v}$  ja  $\bar{w}$  välinen kulma kosinilauseen näkökulmasta.

Kosinilauseen mukaan kuvan 13.34 kolmiossa pätee

$$\|\bar{w} - \bar{v}\|^2 = \|\bar{v}\|^2 + \|\bar{w}\|^2 - 2\|\bar{v}\|\|\bar{w}\|\cos \alpha.$$

Toisaalta normin määritelmän nojalla

$$\|\bar{w} - \bar{v}\|^2 = (\bar{w} - \bar{v}) \cdot (\bar{w} - \bar{v}) = \bar{w} \cdot \bar{w} - \bar{w} \cdot \bar{v} - \bar{v} \cdot \bar{w} + \bar{v} \cdot \bar{v} = \|\bar{v}\|^2 - 2(\bar{v} \cdot \bar{w}) + \|\bar{w}\|^2.$$

Saadaan siis yhtälö

$$\|\bar{v}\|^2 + \|\bar{w}\|^2 - 2\|\bar{v}\|\|\bar{w}\|\cos \alpha = \|\bar{v}\|^2 - 2(\bar{v} \cdot \bar{w}) + \|\bar{w}\|^2,$$

josta edelleen

$$\cos \alpha = \frac{\bar{v} \cdot \bar{w}}{\|\bar{v}\|\|\bar{w}\|}.$$

Aiemmin määriteltiin, että vektorit ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan, jos niiden pistetulo on nolla. Olisi luonnollista, että toisiaan vastaan kohtisuorien vektorien välinen kulma olisi  $90^\circ$ . Tämä pitääkin paikkansa. Oletetaan nimittäin, että  $\bar{v}, \bar{w} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\bar{0}\}$ . Määritelmän 13.3 mukaan vektoreiden  $\bar{v}$  ja  $\bar{w}$  välinen kulma on  $90^\circ$ , jos ja vain jos

$$\frac{\bar{v} \cdot \bar{w}}{\|\bar{v}\|\|\bar{w}\|} = \cos 90^\circ.$$

Koska  $\cos 90^\circ = 0$ , yhtälö pätee, jos ja vain jos  $\bar{v} \cdot \bar{w} = 0$ . Siten vektoreiden  $\bar{v}$  ja  $\bar{w}$  välinen kulma on  $90^\circ$ , jos ja vain jos  $\bar{v} \cdot \bar{w} = 0$ .

## 13.4 Pistetulon sovelluksia

### Normaalimuotoiset yhtälöt

**Esimerkki 13.19.** Tarkastellaan kaikkia avaruuden  $\mathbb{R}^3$  vektoreita  $\bar{v}$ , jotka ovat kohtisuorassa vektoria  $\bar{n} = (1, 2, 3)$  vastaan. Tällaiset vektorit toteuttavat yhtälön  $\bar{n} \cdot \bar{v} = 0$  eli

$$v_1 + 2v_2 + 3v_3 = 0.$$

Vektorien muodostama joukko  $W$  voidaan kirjoittaa eri muodoissa:

$$\begin{aligned} W &= \{(v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3 \mid (1, 2, 3) \cdot (v_1, v_2, v_3) = 0\} \\ &= \{(v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3 \mid v_1 + 2v_2 + 3v_3 = 0\} \\ &= \{(v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3 \mid v_1 = -2v_2 - 3v_3\} \\ &= \{(-2v_2 - 3v_3, v_2, v_3) \mid v_2, v_3 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{v_2(-2, 1, 0) + v_3(-3, 0, 1) \mid v_2, v_3 \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

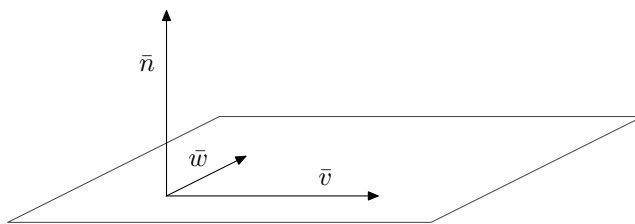
Viimeisestä muodosta nähdään, että kyseessä on origon kautta kulkeva taso eli aliavaruus.

Edellistä esimerkkiä voidaan yleistää, jolloin nähdään, että kaikki jotakin nollavektorista poikkeavaa vektoria vastaan kohtisuorassa olevat avaruuden  $\mathbb{R}^3$  vektorit muodostavat tietyn tason, joka on samalla aliavaruus. Päättelään seuraavaksi sama asia toiseen suuntaan.

Tarkastellaan aluksi origon kautta kulkevaa tasoa  $T = \{s\bar{v} + t\bar{w} \mid s, t \in \mathbb{R}\}$ . Jos jokin vektori  $\bar{n}$  on kohtisuorassa tason molempia suuntavektoreita vastaan, niin kaikille tason vektoreille  $s\bar{v} + t\bar{w}$  pätee

$$\bar{n} \cdot (s\bar{v} + t\bar{w}) = s(\bar{n} \cdot \bar{v}) + t(\bar{n} \cdot \bar{w}) = s \cdot 0 + t \cdot 0 = 0.$$

Vektori  $\bar{n}$  on siis kohtisuorassa kaikkia tason vektoreita vastaan, jolloin sanotaan, että se on *kohtisuorassa tasoa vastaan*. Tällaista vektoria kutsutaan tason *normaaliksi* (ks. kuva 13.35).



Kuva 13.35: Tason normaali  $\bar{n}$ .

Olkoon  $\bar{n}$  edelleen origon kautta kulkevan tason  $T$  normaali. Voidaan osoittaa, että piste  $\bar{x}$  on tasossa  $T$ , jos ja vain jos

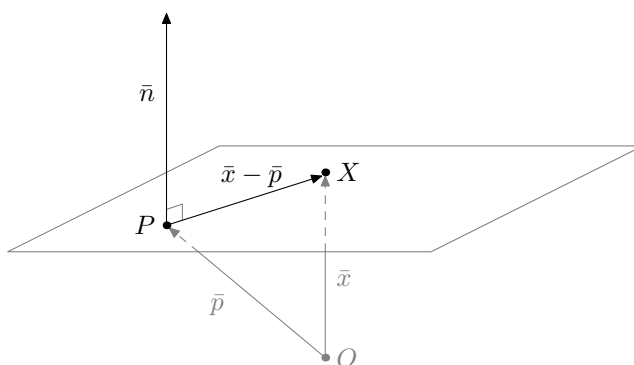
$$\bar{n} \cdot \bar{x} = 0.$$

Tällaista yhtälöä kutsutaan tason *normaalimuotoiseksi yhtälöksi* (kun taso kulkee origon kautta).

Jos taso ei kulje origon kautta, on sen vektoreita siirrettävä ennen normaalin määrittämistä. Oletetaan, että  $T$  on nyt avaruuden  $\mathbb{R}^3$  taso, jonka paikkavektori on  $\bar{p}$  ja jolla on normaali  $\bar{n}$ . Tällöin  $\bar{x}$  on tasossa  $T$ , jos ja vain jos

$$\bar{n} \cdot (\bar{x} - \bar{p}) = 0.$$

Tämä on siis normaalimuotoinen yhtälö tapauksessa, jossa taso ei kulje origon kautta. Tilannetta on havainnollistettu kuvassa 13.36.



Kuva 13.36: Tason  $T$  normaalimuotoisen yhtälön havainnollistus.

**Esimerkki 13.20.** Oletetaan, että taso  $T$  kulkee pisteen  $P = (6, 0, 1)$  kautta ja sillä on normaali  $\bar{n} = (1, 2, 3)$ . Tason  $T$  normaalimuotoinen yhtälö on tällöin

$$(1, 2, 3) \cdot (\bar{x} - (6, 0, 1)) = 0.$$

Tasossa  $T$  ovat siis ne pisteet  $\bar{x}$ , jotka toteuttavat edellä esitetyn yhtälön. Toisin sanoen

$$T = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^3 \mid (1, 2, 3) \cdot (\bar{x} - (6, 0, 1)) = 0\}.$$

Kirjoitetaan sama taso vielä hiukan toisenlaisessa muodossa. Merkitään  $\bar{x} = (x, y, z)$ , missä  $x, y, z \in \mathbb{R}$ . Nyt

$$\begin{aligned} (1, 2, 3) \cdot (\bar{x} - (6, 0, 1)) &= (1, 2, 3) \cdot (x - 6, y - 0, z - 1) \\ &= x - 6 + 2y + 3z - 3 \\ &= x + 2y + 3z - 9. \end{aligned}$$

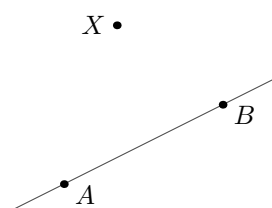
Voidaan siis kirjoittaa  $T = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + 3z - 9 = 0\}$ .

Avaruuden  $\mathbb{R}^2$  suorille on mahdollista johtaa normaalimuotoinen yhtälö samalla tavalla kuin tasosille.

### Pisteen etäisyys suorasta

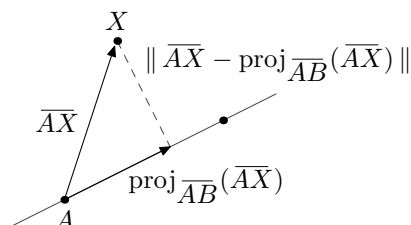
Pisteen  $X$  etäisyys suorasta  $S = \{\bar{p} + t\bar{v} \mid t \in \mathbb{R}\}$  on kaikkein lyhin välimatka, joka voi olla pisteen  $X$  ja suoran  $S$  jonkin pisteen välillä. Täsmällisesti ilmaistuna pisteen  $X$  etäisyys suorasta  $S$  on  $\min\{d(\bar{x}, \bar{a}) \mid \bar{a} \in S\}$ , missä  $\bar{x}$  on pisteen  $X$  paikkavektori. Tämä etäisyys on sama kuin sellaisen janan pituus, jonka toinen päätepiste on  $X$  ja toinen suoralla  $S$ , ja joka muodostaa suoran kulman suoran  $S$  kanssa. (Todistus ei ole vaikea, mutta se sivuutetaan.) Etäisyyden määrittämiseen voidaan siten käyttää projektiota. Tutkitaan tätä esimerkin avulla.

**Esimerkki 13.21.** Määritetään pisteen  $X = (4, -1, 9)$  etäisyys suorasta  $S$ , joka kulkee pisteiden  $A = (2, -3, 5)$  ja  $B = (4, 1, 7)$  kautta (ks. kuva 13.37).



Kuva 13.37: Pisteiden  $A$  ja  $B$  kautta kulkeva suora  $S$ .

Määritetään ensin vektori jostakin suoran pisteestä tutkittavaan pisteeseen. Esimerkiksi vektori  $\overline{AX} = \overline{OX} - \overline{OA} = (2, 2, 4)$  käy tähän tarkoitukseen. Lisäksi tarvitaan jokin suoran suuntavektori, kuten vaikkapa vektori  $\overline{AB} = (2, 4, 2)$ .



Kuva 13.38: Pisteen  $X$  etäisyys suorasta  $S$ .

Vektorin  $\overline{AX}$  projektiio suoralle  $S$  on

$$\text{proj}_{\overline{AB}}(\overline{AX}) = \frac{\overline{AX} \cdot \overline{AB}}{\overline{AB} \cdot \overline{AB}} \overline{AB} = \frac{20}{24}(2, 4, 2) = \frac{5}{6}(2, 4, 2).$$

Erotus  $\overline{AX} - \text{proj}_{\overline{AB}}(\overline{AX})$  on projektion määritelmän mukaisesti kohtisuorassa suoraa  $S$  vastaan. Lasketaan kyseinen erotus:

$$\begin{aligned} \overline{AX} - \text{proj}_{\overline{AB}}(\overline{AX}) &= (2, 2, 4) - \frac{5}{6}(2, 4, 2) = \frac{6}{6}(2, 2, 4) - \frac{5}{6}(2, 4, 2) \\ &= \frac{1}{6}(12 - 10, 12 - 20, 24 - 10) = \frac{1}{6}(2, -8, 14) \\ &= \frac{1}{3}(1, -4, 7) \end{aligned}$$

Koska  $\overline{AX} - \text{proj}_{\overline{AB}}(\overline{AX})$  on kohtisuorassa suoraa  $S$  vastaan, antaa erotusvektorin pituus pisteen  $X$  etäisyyden suorasta:

$$\|\overline{AX} - \text{proj}_{\overline{AB}}(\overline{AX})\| = \frac{1}{3}\|(1, -4, 7)\| = \frac{1}{3}\sqrt{1 + 16 + 49} = \frac{1}{3}\sqrt{66}.$$

Siten pisteen  $X$  etäisyys suorasta  $S$  on  $\frac{1}{3}\sqrt{66}$ .

## 14 Ristitulo

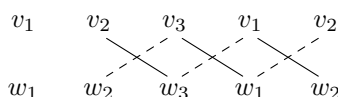
Avaruuden  $\mathbb{R}^3$  vektoreille voidaan määritellä pistetulon lisäksi niin kutsuttu ristitulo. Pistetulosta poiketen ristitulon tulos ei ole reaaliluku vaan avaruuden  $\mathbb{R}^3$  vektori. Ristitulosta on hyötyä esimerkiksi silloin, kun tarvitaan vektori, joka on kohtisuorassa jotakin tasoa vastaan.

Ristitulo poikkeaa kaikista kursilla tähän mennessä määritellyistä käsitteistä siinä, että sen määritelmää ei voida yleistää kaikkiin avaruuksiin  $\mathbb{R}^n$ . Ristitulo on nimenomaan kolmiulotteisen avaruuden laskutoimitus.

**Määritelmä 14.1.** Vektorien  $\bar{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$  ja  $\bar{w} = (w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{R}^3$  ristitulo on vektori

$$\bar{v} \times \bar{w} = (v_2w_3 - v_3w_2, v_3w_1 - v_1w_3, v_1w_2 - v_2w_1).$$

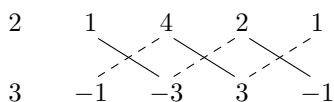
Ristitulon  $\bar{v} \times \bar{w}$  laskemiseen voi käyttää kuvassa 14.39 esitettyä laskusääntöä. Yhtenäisellä viivalla yhdistettyjen komponenttien tulosta vähennetään katkoviivalla yhdistettyjen komponenttien tulo.



Kuva 14.39: Ristitulon  $\bar{v} \times \bar{w}$  laskeminen.

**Esimerkki 14.2.** Merkitään  $\bar{a} = (2, 1, 4)$  ja  $\bar{b} = (3, -1, -3)$ . Kuvan 14.40 perusteella voidaan laskea

$$\bar{a} \times \bar{b} = (1 \cdot (-3) - 4 \cdot (-1), 4 \cdot 3 - 2 \cdot (-3), 2 \cdot (-1) - 1 \cdot 3) = (1, 18, -5).$$



Kuva 14.40: Ristitulon  $\bar{a} \times \bar{b}$  laskeminen.

Ristitulolle saadaan toinen muistisääntö determinantin avulla. Vektoreiden  $\bar{v}$  ja  $\bar{w}$  ristitulo saadaan laskemalla determinantti

$$\begin{vmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}.$$

Tässä  $\bar{e}_1 = (1, 0, 0)$ ,  $\bar{e}_2 = (0, 1, 0)$  ja  $\bar{e}_3 = (0, 0, 1)$ . Tarkalleen ottaen oikean determinantin alkioit eivät voisi olla vektoreita, mutta kyseessä on vain muistisääntö: vektoreiden  $\bar{e}_1$ ,  $\bar{e}_2$  ja  $\bar{e}_3$  ajatellaan käyttäytyvän determinanttia laskettaessa reaalityyppisen tavoin.



**Esimerkki 14.3.** Esimerkiksi vektoreiden  $\bar{a} = (2, 1, 4)$  ja  $\bar{b} = (3, -1, -3)$  ristitulo on

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & -3 \end{vmatrix} &= \bar{e}_1(1 \cdot (-3) - 4 \cdot (-1)) - \bar{e}_2(2 \cdot (-3) - 4 \cdot 3) + \bar{e}_3(2 \cdot (-1) - 1 \cdot 3) \\ &= \bar{e}_1 + 18\bar{e}_2 - 5\bar{e}_3 = (1, 18, -5). \end{aligned}$$

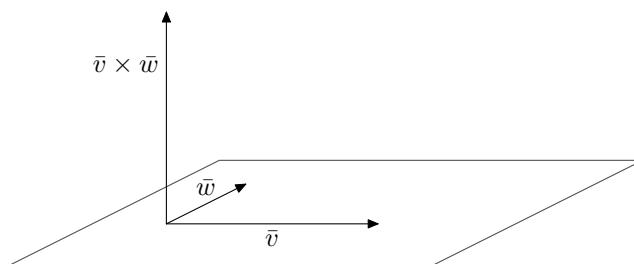
Eräs ristitulon sovelluksista on, että sen avulla voidaan löytää vektori, joka on kohtisuorassa yhtä aikaa kahta vektoria vastaan.

**Lause 14.4.** Oletetaan, että  $\bar{v}, \bar{w} \in \mathbb{R}^3$ . Tällöin  $(\bar{v} \times \bar{w}) \perp \bar{v}$  ja  $(\bar{v} \times \bar{w}) \perp \bar{w}$ .

*Todistus.* Huomataan, että

$$\begin{aligned} (\bar{v} \times \bar{w}) \cdot \bar{v} &= (v_2w_3 - v_3w_2, v_3w_1 - v_1w_3, v_1w_2 - v_2w_1) \cdot (v_1, v_2, v_3) \\ &= (v_2w_3 - v_3w_2)v_1 + (v_3w_1 - v_1w_3)v_2 + (v_1w_2 - v_2w_1)v_3 \\ &= v_2w_3v_1 - v_3w_2v_1 + v_3w_1v_2 - v_1w_3v_2 + v_1w_2v_3 - v_2w_1v_3 = 0. \end{aligned}$$

Siten vektorit  $(\bar{v} \times \bar{w})$  ja  $\bar{v}$  ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan. Väitteen toinen osa osoitetaan samalla tavalla.  $\square$



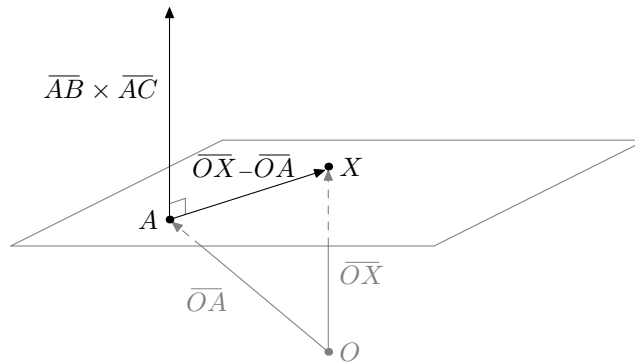
Kuva 14.41: Ristitulo  $\bar{v} \times \bar{w}$  on kohtisuorassa vektoria  $\bar{v}$  ja vektoria  $\bar{w}$  vastaan.

Edellisestä lauseesta seuraa, että ristitulon avulla voidaan löytää tason normaali (eli vektori, joka on kohtisuorassa tason suuntavektoreita vastaan). Tästä on hyötyä tason normaalimuotoisen yhtälön määrittämisessä.

**Esimerkki 14.5.** Määritetään esimerkkiä 13.20 mukaillen normaalimuotoinen yhtälö tasolle  $T$ , joka kulkee pisteiden  $A = (0, 1, 0)$ ,  $B = (-1, 3, 2)$  ja  $C = (-2, 0, 1)$  kautta. Tätä varten tarvitaan tason  $T$  normaali. Normaali on vektori, joka on kohtisuorassa tason suuntavektoreita vastaan. Valitaan suuntavektoreiksi suuntajana  $\overline{AB} = (-1, 2, 2)$  ja  $\overline{AC} = (-2, -1, 1)$ , jolloin normaaliksi käy edellisen lauseen nojalla vektorien ristitulo  $\overline{AB} \times \overline{AC} = (4, -3, 5)$ .

Lisäksi tarvitaan jokin tason paikkavektori, kuten esimerkiksi  $\overline{OA} = (0, 1, 0)$ . Kun merkitään vielä  $\bar{x} = \overline{OX} = (x, y, z)$ , tason normaalimuotoiseksi yhtälöksi saadaan esimerkin 13.20 mukaisesti

$$\underbrace{(\overline{AB} \times \overline{AC})}_{\text{normaali}} \cdot (\overline{OX} - \overline{OA}) = 0.$$



Kuva 14.42: Tason  $T$  normaalimuotoisen yhtälön määrittäminen.

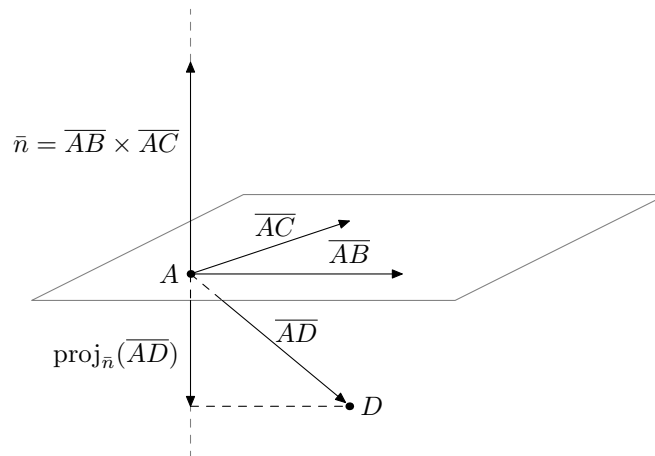
Kun yhtälöön sijoitetaan luvut, se tulee muotoon

$$(4, -3, 5) \cdot (x, y - 1, z) = 0.$$

Laskemalla pistetulo saadaan yhtälö lopulliseen muotoon  $4x - 3y + 5z + 3 = 0$ . Näin ollen

$$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 4x - 3y + 5z + 3 = 0\}.$$

**Esimerkki 14.6.** Pisteiden etäisyys tasosta voidaan määrittää ristitulon ja projektion avulla. Merkitään  $A = (0, 1, 0)$ ,  $B = (-1, 3, 2)$  ja  $C = (-2, 0, 1)$ . Oletetaan, että taso  $T$  kulkee pisteiden  $A$ ,  $B$  ja  $C$  kautta. Määritetään pisteen  $D = (1, 2, 3)$  etäisyys tasosta  $T$  (ks. kuva 14.43).



Kuva 14.43: Pisteiden  $D$  etäisyys tasosta  $T$ .

Tason suuntaisten vektoreiden  $\overline{AB} = (-1, 2, 2)$  ja  $\overline{AC} = (-2, -1, 1)$  ristitulo  $\overline{AB} \times \overline{AC} = (4, -3, 5)$  on tason normaali. Lisäksi tarvitaan vektori jostakin tason pisteestä pisteeseen  $D =$

$(1, 2, 3)$ . Valitaan vektori  $\overline{AD} = \overline{OD} - \overline{OA} = (1, 1, 3)$ . Vektorin  $\overline{AD}$  projekti normaalin  $\bar{n} = (4, -3, 5)$  virittämälle aliavaruudelle on

$$\text{proj}_{\bar{n}}(\overline{AD}) = \frac{\overline{AD} \cdot \bar{n}}{\bar{n} \cdot \bar{n}} \bar{n} = \frac{16}{50} (4, -3, 5) = \frac{8}{25} (4, -3, 5).$$

Tämän projektion normi (eli pituus) on pisteen  $D$  etäisyys tasosta  $T$ :

$$\|\text{proj}_{\bar{n}}(\overline{AD})\| = \frac{8}{25} \|(4, -3, 5)\| = \frac{8}{25} \sqrt{16 + 9 + 25} = \frac{8}{25} \sqrt{50} = \frac{8}{5} \sqrt{2}.$$

Seuraavassa lauseessa on lueteltu ristituloon liittyviä laskusääntöjä. Erityisesti sääntöihin a), e) ja g) on hyvä kiinnittää huomiota, sillä ne poikkeavat monista tutuista laskusäännöistä. Esimerkiksi säännön a) mukaan ristitulo ei ole vaihdannainen laskutoimitus.

**Lause 14.7.** *Oletetaan, että  $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w} \in \mathbb{R}^3$  ja  $c \in \mathbb{R}$ . Tällöin*

a)  $\bar{v} \times \bar{w} = -(\bar{w} \times \bar{v})$  *(antikommutointi)*

b)  $\bar{u} \times (\bar{v} + \bar{w}) = \bar{u} \times \bar{v} + \bar{u} \times \bar{w}$  *(osittelulaki)*

c)  $(\bar{v} + \bar{w}) \times \bar{u} = \bar{v} \times \bar{u} + \bar{w} \times \bar{u}$  *(osittelulaki)*

d)  $c(\bar{v} \times \bar{w}) = (c\bar{v}) \times \bar{w} = \bar{v} \times (c\bar{w})$

e)  $\bar{v} \times \bar{v} = \bar{0}$

f)  $\bar{0} \times \bar{v} = \bar{0}$  ja  $\bar{v} \times \bar{0} = \bar{0}$

g)  $\bar{u} \cdot (\bar{v} \times \bar{w}) = (\bar{u} \times \bar{v}) \cdot \bar{w}$

*Todistus.* Lauseen todistus on suoraviivainen ja käyttää ainoastaan ristitulon määritelmää. Todistus jätetään harjoitustehtäväksi.  $\square$

Ristitulolla ja pistetulolla on yhteyksiä, jotka eivät ole aivan itsestään selviä. Niitä on koottu seuraavaan lauseeseen.

**Lause 14.8.** *Oletetaan, että  $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w} \in \mathbb{R}^3$ . Tällöin*

a)  $(\bar{u} \times \bar{v}) \times \bar{w} = (\bar{u} \cdot \bar{w})\bar{v} - (\bar{v} \cdot \bar{w})\bar{u}$

b)  $\bar{u} \times (\bar{v} \times \bar{w}) = (\bar{u} \cdot \bar{w})\bar{v} - (\bar{u} \cdot \bar{v})\bar{w}$

c)  $\|\bar{v} \times \bar{w}\|^2 = \|\bar{v}\|^2 \|\bar{w}\|^2 - (\bar{v} \cdot \bar{w})^2$  *(Lagrange'n identiteetti)*

*Todistus.* Osoitetaan kohta c) (eli Lagrange'n identiteetti) ja jätetään muut kohdat harjoitustehtäviksi. Käyttämällä lauseen 14.7 kohtaa g) ja lauseen 14.8 kohtaa a) saadaan

$$\begin{aligned} \|\bar{v} \times \bar{w}\|^2 &= (\bar{v} \times \bar{w}) \cdot (\bar{v} \times \bar{w}) = ((\bar{v} \times \bar{w}) \times \bar{v}) \cdot \bar{w} \\ &= ((\bar{v} \cdot \bar{v})\bar{w} - (\bar{v} \cdot \bar{w})\bar{v}) \cdot \bar{w} = (\|\bar{v}\|^2 \bar{w} - (\bar{v} \cdot \bar{w})\bar{v}) \cdot \bar{w} \\ &= \|\bar{v}\|^2 (\bar{w} \cdot \bar{w}) - (\bar{v} \cdot \bar{w})(\bar{v} \cdot \bar{w}) = \|\bar{v}\|^2 \|\bar{w}\|^2 - (\bar{v} \cdot \bar{w})^2. \end{aligned}$$

Siten Lagrange'n identiteetti pätee.  $\square$

Lauseen 14.4 perusteella tiedetään, että kahden vektorin ristitulo on kohtisuorassa kumpaa-kin vektoria vastaan, joten ristitulovektorin suunnalla on vain kaksi mahdollisuutta. Ristitulovektorin pituus puolestaan määräytyy seuraavasta lauseesta.

**Lause 14.9.** Oletetaan, että  $\bar{v}, \bar{w} \in \mathbb{R}^3$ . Jos  $\bar{v} \neq \bar{0}$  ja  $\bar{w} \neq \bar{0}$ , niin

$$\|\bar{v} \times \bar{w}\| = \|\bar{v}\| \|\bar{w}\| \sin \alpha,$$

missä  $\alpha$  on vektorien  $\bar{v}$  ja  $\bar{w}$  välinen kulma.

*Todistus.* Todistuksessa käytetään Lagrangen identiteettiä (lause 14.8). Vektorien välisen kulman määritelmän mukaan  $\cos \alpha = (\bar{v} \cdot \bar{w}) / (\|\bar{v}\| \|\bar{w}\|)$ , ja lisäksi pätee  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ . Nyt Lagrangen identiteetistä saadaan

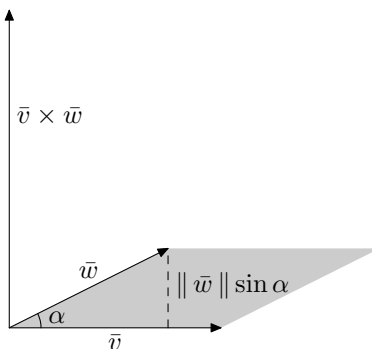
$$\begin{aligned} \|\bar{v} \times \bar{w}\|^2 &= \|\bar{v}\|^2 \|\bar{w}\|^2 - (\bar{v} \cdot \bar{w})^2 = \|\bar{v}\|^2 \|\bar{w}\|^2 - (\cos \alpha \cdot \|\bar{v}\| \|\bar{w}\|)^2 \\ &= \|\bar{v}\|^2 \|\bar{w}\|^2 - \cos^2 \alpha \cdot \|\bar{v}\|^2 \|\bar{w}\|^2 = \|\bar{v}\|^2 \|\bar{w}\|^2 (1 - \cos^2 \alpha) \\ &= \|\bar{v}\|^2 \|\bar{w}\|^2 \sin^2 \alpha = (\|\bar{v}\| \|\bar{w}\| \sin \alpha)^2. \end{aligned}$$

Vektorien välisen kulman määritelmän mukaan  $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$ , mistä seuraa, että  $\sin \alpha \geq 0$ . Lisäksi vektorien normit ovat aina epänegatiivisia. Siten  $\|\bar{v} \times \bar{w}\| \geq 0$  ja  $\|\bar{v}\| \|\bar{w}\| \sin \alpha \geq 0$ . Saadusta yhtälöstä voidaan näin ollen päätellä, että

$$\|\bar{v} \times \bar{w}\| = \|\bar{v}\| \|\bar{w}\| \sin \alpha.$$

Tämä todistaa väitteen. □

Edellisestä lauseesta seuraa, että ristitulovektorin  $\bar{v} \times \bar{w}$  pituus on yhtä suuri kuin vektorien  $\bar{v}$  ja  $\bar{w}$  määräämän suunnikkaan ala (ks. kuva 14.44). Oletetaan nimittäin, että vektorien  $\bar{v}$  ja  $\bar{w}$  välinen kulma on  $\alpha$ . Tällöin suunnikkaan korkeus on  $\|\bar{w}\| \sin \alpha$ . Näin suunnikkaan pinta-alaksi saadaan  $\|\bar{w}\| \sin \alpha \cdot \|\bar{v}\| = \|\bar{v} \times \bar{w}\|$ .



Kuva 14.44: Ristitulovektorin  $\bar{v} \times \bar{w}$  pituus on yhtä suuri kuin vektorien  $\bar{v}$  ja  $\bar{w}$  määräämän suunnikkaan ala.

Ristitulon avulla voidaan määrittää myös suuntaissärmiön tilavuus. Vektoreiden  $\bar{v}$ ,  $\bar{w}$  ja  $\bar{u}$  määräämän suuntaissärmiön tilavuus on pohjan pinta-alan  $\|\bar{v} \times \bar{w}\|$  ja korkeuden  $h$  tulo

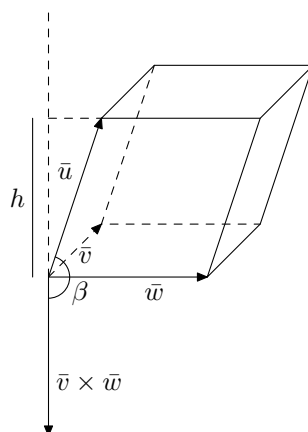
(ks. kuva 14.45). Pohjan pinta-alan tiedetään olevan  $\|\bar{v} \times \bar{w}\|$ . Määritetään vielä korkeus  $h$ . Olkoon  $\beta$  vektoreiden  $\bar{u}$  ja  $\bar{v} \times \bar{w}$  välinen kulma. Nyt

$$h = \|\bar{u}\| |\cos(180^\circ - \beta)| = \|\bar{u}\| \cos \beta.$$

Siten tilavuus on

$$\|\bar{v} \times \bar{w}\| \|\bar{u}\| \cos \beta = \|\bar{v} \times \bar{w}\| \|\bar{u}\| \cos \beta = |(\bar{v} \times \bar{w}) \cdot \bar{u}|.$$

Viimeisessä välivaiheessa käytettiin vektorien  $\bar{u}$  ja  $\bar{v} \times \bar{w}$  välisen kulman määritelmää. Suuntaissärmiön tilavuus on siis niin kutsutun *skalaarikolmitulon*  $(\bar{v} \times \bar{w}) \cdot \bar{u}$  itseisarvo. Lauseesta 14.7 seuraa, että vektorien  $\bar{v}$ ,  $\bar{w}$  ja  $\bar{u}$  järjestyksellä tässä kaavassa ei ole väliä.



Kuva 14.45: Vektoreiden  $\bar{v}$ ,  $\bar{w}$  ja  $\bar{u}$  määräämän suuntaissärmiön tilavuus.

# Hakemisto

- aliavaruus, 18
- alkeismatriisi, 67
- alkeisrivitoimitus, 24
- alkio, matriisin, 54
- antisymmetrinen, 59
- avaruus  $\mathbb{R}^n$ , 9
  
- determinantti, 73
  - kehityskaava, 75
- diagonaali, 57
- diagonalisointi, 85
- diagonalisoituva matriisi, 85
- dimensio, 51
  
- ekvivalentit yhtälöryhmät, 23
- erotus
  - matriisien, 55
  - vektorien, 9
- etäisyys, vektorien välinen, 94
  
- Gaussin-Jordanin eliminointimenetelmä, 26
  
- homogeeninen yhtälöryhmä, 45
  
- johtava alkio, 24
  
- käänteismatriisi, 60
- kääntävä matriisi, 60
- kanta, 47
- karakteristinen polynomi, 85
- kohtisuoruus, 94
- komponentti, 9
- koordinaatit, 48
- kulma, vektorien välinen, 98
  
- lävistäjä, 57
- lävistäjämatriisi, 57
- lineaarikombinaatio, 11
  
- lineaarinen yhtälöryhmä, 22
- lineaarisesti riippumaton, 40
- lineaariyhdistelmä, 11
  
- matriisi, 54
- matriisikertolasku, 55
- matriisipotenssi, 56
  
- neliömatrissi, 57
- nollamatriisi, 56
- nollavektori, 9
- normaalimuotoinen yhtälö, tason, 100
- normi, 92
  
- ominaisarvo, 81
- ominaisvektori, 81
- ortogonaalisuus, 94
  
- paikkavektori
  - suoran, 12
  - tason, 16
- pistetulo, 91
- pituus, vektorin, 92
- porrasmatriisi, 24
- projektio, 95
  
- reduoitu porrasmatriisi, 25
- ristitulo, 104
- riviekvivalentti, 24
  
- sarakevektori, 64
- sidottu, 40
- similaariset matriisit, 88
- skalaari, 9
- skalaarikertolasku
  - matriisien, 55
  - vektorien, 9

skalaarimatriisi, 57  
skalaarimonikerta  
    matriisiin, 55  
    vektorin, 9  
suora, 12  
suuntavektori  
    suoran, 12  
    tason, 16  
symmetrinen, 59  
  
taso, 16  
transpoosi, 58  
tuntematon, 23  
tyyppi, matriisiin, 54  
  
vapaa, 40  
vapaa muuttuja, 29  
vastavektori, 9  
vektoreiden virittämä aliavaruus, 18  
vektori, 9  
virittäminen, 18  
  
yhdensuuntaisuus, 10  
yhtälöryhmä, 22  
yhteenlasku  
    matriisien, 54  
    vektorien, 9  
ykkösmatriisi, 56  
yksikkövektori, 93