Äärellisulotteinen lineaarialgebra, kevät 2015.
Harjoitus 9.

1. Olkoon $L\colon K^{\mathbb{N}} \to K^{\mathbb{N}}$ kaavalla

$$L(x_0, x_1, x_2, \dots) = (x_1, x_2, x_3, \dots)$$

määritelty "siirto-operaattori". Osoita, että skalaarikunnan K jokainen alkio $k \in K$ on tämän operaattorin ominaisarvo. Onko vastaava ominaisarvoaliavaruus V_k äärellisulotteinen? Jos on, niin mikä on sen dimensio?

2. Neliömatriisia A sanotaan symmetriseksi jos $A^T = A$. Olkoon $A \in M(2 \times 2; \mathbb{R})$ symmetrinen (2×2)-kokoinen matriisi. Osoita, että A on diagonalisoituva. Onko samanlainen tulos voimassa kun $\mathbb{R}$ korvataan kunnalla $\mathbb{C}$? Entäs kun se korvataan kunnalla $\mathbb{Q}$?

3. Olkoon $L\colon V \to V$ lineaarinen operaattori ja oletetaan, että $\dim V = n \in \mathbb{N}$. Olkoon $f \in V^*$ operaattorin $L^*\colon V^* \to V^*$ ominaisvektori. Osoita, että $\operatorname{Ker} f$ on $(n-1)$-ulotteinen avaruuden V aliavaruus, joka on invariantti operaattorin L suhteen. Lisää pohdittavaa: Osaatko todistaa Proposition 3.22 väite tämän tehtävän tuloksen avulla?

4. Olkoot $L\colon V \to W$, $L'\colon W \to V$ lineaarisia kuvauksia K-vektoriavaruuksien V, W välillä.
a) Olkoon $k \in K$, $k \neq 0_K$. Osoita, että k on operaattorin $LL'\colon W \to W$ ominaisarvo jos ja vain jos k on operaattorin $L'L\colon V \to V$ ominaisarvo.
b) Oletetaan, että V ja W ovat äärellisulotteisia ja lisäksi $\dim V = \dim W$. Osoita, että tällöin kunnan K nolla-alkio on operaattorin $LL'\colon W \to W$ ominaisarvo jos ja vain jos se on operaattorin $L'L\colon V \to V$ ominaisarvo. Osoita vastaesimerkillä, että tämä väite ei välttämättä pidä paikkaansa jos oletus $\dim V = \dim W$ ei ole voimassa.

5. Olkoon $L\colon M(n \times n; K) \to M(n \times n; K)$, $L(X) = X^T$. Osoita, että 1_K ja (-1_K) ovat operaattorin L ainoat ominaisarvot. Mitkä ovat näihin ominaisarvoihin liittyvät ominaisarvoaliavaruudet? Onko L diagonalisoituva?

6. Osoita, että jokainen algebrallisesti suljettu kunta on ääretön. (HUOM. alg. suljetun kunnan määritelmä Luvun 3 sivulla 18 on korjattu materiaalin päivitetyssä versiossa 12.3. Edellisen version määritelmä ei ollut oikea).

7.* a) Olkoon

$$P_m = \{p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ on polynomi, jonka aste on korkeintaan } m\}$$

ja olkoon $\mathcal{D}\colon P_m \to P_m$, $\mathcal{D}(p) = p'$ derivaatta-operaattori. Esimerkissä 3.2. todettiin, että P_n on invariantti operaatorin $\mathcal{D}$ suhteen kaikilla $0 \leq n \leq m$. Osoita kääntäen, että avaruudella P_m ei ole muita epätriviaaleja $\mathcal{D}$-invariantteja aliavaruuksia. (Vihje: osoita, että invariantti aliavaruus W sisältää l-asteisia polynomeja f_l kaikilla $l = 0, \dots, n$, missä n on sopiva luku. Osoita tämän avulla, että $W = P_n$).

8.* Olkoon $L\colon V \to V$ äärellisulotteisen K-vektoriavaruuden V operaattori. Oletetaan, että $k \in K$ on sellainen, että k^2 on operaattorin L^2 ominaisarvo. Osoita, että ainakin toinen alkioista k ja $(-k)$ on operaattorin L ominaisarvo. (Vihje: oletus tarkoittaa sitä, että $\det(L^2 - k^2 \,\mathrm{id}_V) = 0$).

"Tähti"-tehtäviä ei oteta huomioon kurssin harjoitustehtävien kokonaislukumäärää laskiessa. Esimerkiksi tässä sarjassa harjoitustehtäviä on virallisesti vain 6 tehtävää.