Äärellisulotteinen lineaarialgebra, kevät 2015.
Harjoitus 8.

1. Olkoon $L\colon V \to W$ äärellisulotteisten K-vektoriavaruuksien V, W välinen lineaarinen kuvaus.
   a) Olkoon U mikä tahansa aliavaruuden $\operatorname{Ker} L$ komplementti avaruudessa V. Osoita, että tällöin rajoittumakuvaus $L|U\colon U \to \operatorname{Im} L$ on isomorfismi.
   b) Osoita, että on olemassa avaruuden V kanta E ja avaruuden W kanta E' siten, että $[L]_{E',E}$ on lohkomatriisi muotoa

$$\begin{bmatrix} I_m & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

   missä I_m on $(m \times m)$-kokoinen yksikkömatriisi jollakin $m \in \mathbb{N}$.

2. Osoita todeksi Propositio 2.160: Olkoot $W_1, \ldots, W_n$ vektoriavaruuden V aliavaruuksia siten, että $V = \sum_{i=1}^{n} W_i$. Oletetaan, että W_i on äärellisulotteinen kaikilla $i = 1, \ldots, n$. Tällöin myös V on äärellisulotteinen ja

$$\dim V \leq \sum_{i=1}^{n} \dim W_i.$$

   Lisäksi tämä epäyhtälö pätee yhtälönä, eli

$$\dim V = \sum_{i=1}^{n} \dim W_i$$

   jos ja vain jos summa $\sum_{i=1}^{n} W_i$ on suora. (Vihje: induktio ja Harj. 4.3).

3. Lineaarista operaattoria $L\colon V \to V$, jolle pätee $L^2 = L$, sanotaan *projektioksi*. Olkoon $L\colon V \to V$ projektio. Osoita, että
   a) $\operatorname{Im} L = \{\mathbf{v} \in V \mid L(\mathbf{v}) = \mathbf{v}\}$.
   b) Aliavaruudet $\operatorname{Im} L$ ja $\operatorname{Ker} L$ muodostavat suoran summan ja

$$\operatorname{Im} L \oplus \operatorname{Ker} L = V.$$

   Huom., tässä tehtävässä ei oleteta, että vektoriavaruus V olisi äärellisulotteinen.

4. Olkoon $L\colon V \to V$ lineaarinen kuvaus. Oletetaan, että vektoriavaruus V on äärellisulotteinen. Osoita, että seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä.

   (1) L on projektio edellisen tehtävän määritelmän mielessä, eli $L^2 = L$.

   (2) $\mathrm{id}_V - L$ on projektio.

   (3) On olemassa avaruuden V aliavaruudet W ja U siten, että $V = W \oplus U$ ja L on tähän esitykseen liittyvä projektiokuvaus $\mathrm{pr}\colon W \oplus U \to V$, $\mathrm{pr}(\mathbf{w} + \mathbf{u}) = \mathbf{w}$ kaikilla $\mathbf{w} \in W$, $\mathbf{u} \in U$.

(4) Avaruudella V on kanta E siten, että $[L]_E$ on lohkomatriisi muotoa

$$\begin{bmatrix} I_m & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

missä I_m on $(m \times m)$-kokoinen yksikkömatriisi jollakin $m \in \mathbb{N}$.

Vertaa tulos tehtävän 1 tulokseen. Mikä on tarinan opetus?

5. Olkoot W, W seuraavia K-vektoriavaruuden K^n aliavaruuksia,

$$V = \{(k_1, \dots, k_n) \mid k_1 + \dots + k_n = 0\},$$

$$W = \{(k_1, \dots, k_n) \mid k_1 = \dots = k_n\}.$$

Oletetaan, että kunnan K karakteristika on nolla. Osoita, että summa $V + W$ on suora ja että $V \oplus W = K^n$ suoraan määritelmästä lähtien. Anna jokaiselle vektorille $\mathbf{v} \in K^n$ esitys muodossa

$$\mathbf{v} = \mathbf{w} + \mathbf{u},$$

missä $\mathbf{w} \in W$, $\mathbf{u} \in U$. Miten käy jos kunnan karakteristika ei ole nolla?

6. Tarkastellaan seuraavia K-vektoriavaruuden $M(n \times n; K)$ ($n \in \mathbb{N}$) aliavaruuksia,

$$V = \{A \in M(n \times n; K) \mid A = A^T\},$$

$$U = \{A \in M(n \times n; K) \mid A = -A^T\},$$

$$W = \{A = (a_{ij})_{i=1}^n \in M(n \times n; K) \mid a_{ij} = 0 \text{ kaikilla } i > j\}.$$

$$Z = \{A = (a_{ij})_{i=1}^n \in M(n \times n; K) \mid a_{ij} = 0 \text{ kaikilla } i \leq j\}.$$

Oletetaan, että kunnan K karakteristika ei ole 2. Osoita, että summat $V+U$, $V+Z$, $U+W$ ovat suoria. Osoita, että jokaisen tällaisen summan arvo on koko avaruus $M(n \times n; K)$. Ovatko summat $V+W$, $U+Z$ tai $W+Z$ suoria? Onko oletus kunnan karakteristikasta tarpeellinen?

7.* Olkoon V K-vektoriavaruus ja olkoon $(W_1, \dots, W_n)$ äärellinen jono sen aliavaruuksia.

a) Oletetaan, että summa $\sum_{i=1}^n W_i$ on suora ja sen arvo $\oplus_{i=1}^n W_i$ on koko avaruus V. Jokaisella $i = 1, \dots, n$ olkoon $p_j \colon V \to V$ kaavalla

$$p_j(\sum_{i=1}^n \mathbf{w}_i) = \mathbf{w}_j$$

määritelty lineaarinen projektio. Toisin sanoen p_ij on kanoninen projektio $p_j \colon \sum_{i=i}^n W_i = \prod_{i=1}^n W_i \to W_j$, jossa maaliavaruus on vaihdettu koko avaruudeksi V ja on käytetty luonnollista samastusta $\oplus_{i=1}^n W_i = V$. Osoita, että $\sum_{i=1}^n p_i = \mathrm{id}$ ja $p_i p_j = \delta_{ij} p_i$, $i, j = 1, \dots, n$ (missä δ_{ij} on Kroneckerin delta).

b) Oletetaan kääntäen, että $p_1, \dots, p_n \colon V \to V$ ovat lineaarisia operaattoreita, joille pätee $\sum_{i=1}^n p_i = \mathrm{id}$ ja $p_i p_j = \delta_{ij} p_i$, $i, j = 1, \dots, n$. Osoita, että aliavaruudet $W_i =$

$p_i(V)$ muodostavat suoran summan, jonka arvo on koko avaruus V. Osoita myös, että p_j on tällöin kaavalla

$$p_j(\sum_{i=1}^{n} \mathbf{w}_i) = \mathbf{w}_j$$

määritelty kanoninen projektio.

8.* Olkoot K_1, K_2 kuntia. Määritellään niiden suora tulo $(K_1 \times K_2; p_1, p_2)$ siten, että $K_1 \times K_2$ on kunta ja $p_i \colon K_1 \times K_2 \to K_i$, $i = 1, 2$ ovat kuntahomomorfismeja, siten, että $(K_1 \times K_2; p_1, p_2)$ toteuttaa suoran tulon universaaliominaisuuden. Täsmällisesti - jos K on kunta ja $\phi_i \colon K \to K_i$ on kuntahomorfismi, $i = 1, 2$, niin on olemassa yksikäsitteinen kuntahomomorfismi $\phi \colon K \to K_1 \times K_2$ siten, että $\phi_i = p_i \circ \phi$, $i = 1, 2$.
a) Olkoot $K_1 = \mathbb{Z}_p$, $K_2 = \mathbb{R}$, p alkuluku. Osoita, että ei ole olemassa suoraa tuloa $(K_1 \times K_2; p_1, p_2)$.
b) Osoita, että kuntien $\mathbb{Q}$ ja $\mathbb{C}$ suora tulo $(\mathbb{Q} \times \mathbb{C}; p_1, p_2)$ on olemassa ja (isomorfia vaille) on kunta $\mathbb{Q}$.
(Vihjeet: kuntien väliset homomorfismit ovat injektiivisia. Kuntahomomorfismi $\mathbb{Q} \to K$ on yksikäsitteinen, jos olemassa.)

”Tähti”-tehtäviä ei oteta huomioon kurssin harjoitustehtävien kokonaislukumäärää laskiessa. Esimerkiksi tässä sarjassa harjoitustehtäviä on virallisesti vain 6 tehtävää.