Äärellisulotteinen lineaarialgebra, kevät 2015.
Harjoitus 7.
25.02.2015

1. Olkoon $E = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m)$ K-vektoriavaruuden V kanta ja olkoon $\varepsilon = (\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^m)$ kannan E duaalikanta. Olkoon $F\colon V \times V \to K$ bilineaarinen muoto. Harjoituksen 6.5 nojalla on olemassa lineaarinen kuvaus $\tilde{F}\colon V \to V^*$, $\tilde{F}(\mathbf{v})(\mathbf{v}') = F(\mathbf{v}, \mathbf{v}')$ kaikilla $\mathbf{v}, \mathbf{v}' \in V$.

   Muodon F *matriisi* kannan E suhteen määritellään $(n \times n)$-neliömatriisina $[F]_E = A = (a_{ij}) \in M(n \times n; K)$, jolle pätee $a_{ij} = F(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$ kaikilla $i, j = 1, \dots, n$. Osoita, että
$$[F]_E = [\tilde{F}]^T_{\varepsilon,E}$$

2. Olkoon V äärellisulotteinen K-vektoriavaruus ja olkoot E, E' sen (eri) kannat. Olkoon $F\colon V \times V \to K$ bilineaarinen muoto. Osoita, että
$$[F]_{E'} = A^T [F]_E A,$$
missä A on eräs kannanvaihtomatriisi. Mistä kannanvaihtomatriisista on kyse?

3. Olkoon K kunta, $n \geq 2$, $i \in [n]$. Määritellään kuvaus $F\colon M(n \times n; K) \to K$ kaavalla
$$F(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij}).$$
Osoita, että kuvaus F toteuttaa kaikki Lauseessa 2.138 mainitut determinantin ominaisuudet, toisin sanoen on multilineaarinen ja alternoiva muoto matriisin sarakkeiden suhteen, jolle pätee lisäksi yhtälö $F(I_n) = 1_K$. Tässä A_{ij} on $(n-1) \times (n-1)$ alimatriisi, joka saadaan poistamalla A:stä i:nnes rivi ja j:nnes sarake.

4. Olkoon $A \in M(n \times n; K)$ neliömatriisi. Osoita, että $\det A = 0$ jos ja vain jos sen sarakkeiden muodostama jono $(c_1(A), \dots, c_n(A))$ on sidottu (avaruudessa K^n).

5. Olkoon $A = (a_{ij})_{i,j=1\dots,n} \in M(n \times n; K)$ neliömatriisi. Sen *jälki* (engl. *trace*) $tr(A)$ määritellään kaavalla
$$\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$
   a) Olkoot $A \in M(n \times m; K)$ ja $B \in M(m \times n; K)$. Osoita, että $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.
   b) Olkoon V äärellisulotteinen K-vektoriavaruus ja olkoon E sen kanta. Olkoon $L\colon V \to V$ lineaarinen endomorfismi. Määritellään kuvauksen L jälki kaavalla $\mathrm{tr}\, L = \mathrm{tr}[L]_E$. Osoita, että määritelmä ei riipu kannan valinnasta.

6. Olkoon K kunta ja $L\colon M(n \times n; K) \to K$ lineaarinen kuvaus (eli duaali-avaruuden $M(n \times n; K)^*$ alkio). Osoita, että on olemassa yksikäsitteinen matriisi $A \in M(n \times n; K)$ siten, että $L(X) = \mathrm{tr}(AX)$ kaikilla $X \in M(n \times n; K)$ kahdella eri tavalla seuraavien ohjeiden mukaisesti.

(i) Merkitään L_A:llä kuvausta $X \mapsto \mathrm{tr}(AX)$. Osoita, että kuvaus $A \mapsto L_A$ on lineaarinen injektio $M(n \times n; K) \to M(n \times n; K)^*$. Päättele väite tämän avulla.

(ii) Osoita, että kuvaus $A \mapsto L_A$ kuvaa avaruuden $M(n \times n; K)$ standardikanta (E_{ij}) erään sen (toisen) kannan duaalikannaksi. Päättele väite tästä. (Vihje: laske $L_{E_{ij}}(E_{kl})$).

7.* Olkoon V äärellisulotteinen K-vektoriavaruus, olkoon $E = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ jono avaruuden V vektoreita. Olkoot $L_1, \ldots, L_n \in V^*$ mielivaltaiset. Määritellään matriisi $A = (a_{ij}) \in M(n \times n; K)$ ehdolla $a_{ij} = L_i(\mathbf{v}_j)$.
a) Oletetaan, että jono E on sidottu. Osoita, että $\det A = 0_K$. (Vihje: käytä tehtävää 4).
b) Oletetaan, että jono $(L_1, \ldots, L_n)$ on avaruuden V^* kanta. Osoittaa, että jono E on sidottu jos ja vain jos $\det A = 0$.

8.* Sanomme matriisia $A = (a_{ij}) \in M(n \times m; \mathbb{Q})$ kokonaislukukertoimiseksi jos $a_{ij} \in \mathbb{Z}$ kaikilla $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$. Kaikkien kokonaislukukertoimisten $(n \times m)$-kokoisten matriisien muodostamaa joukkoa merkitään $M(n \times m; \mathbb{Z})$.

Olkoon p alkuluku ja $n \in \mathbb{N}$. Jokaisella $A \in M(n \times n; \mathbb{Z})$ määritellään matriisi $A_p \in M(n \times n; \mathbb{Z}_p)$ asettamalla $A_p = ([a_{ij}])$, missä $[a]$ on kokonaisluvun $a \in \mathbb{Z}$ luokka tekijäjoukossa $\mathbb{Z}_p$. Toisin sanoen muutetaan matriisin jokainen alkio vastaavaksi kokonaisluvuksi modulo p.
a) Osoita, että kaikilla $A \in M(n \times n; \mathbb{Z})$ pätee $\det A_p = [\det A] = (\det A)_p$.
b) Olkoon $A \in M(n \times n; \mathbb{Z})$ kokonaislukukertoiminen neliömatriisi, joka on kääntyvä ($\mathbb{Q}$-algebran $M(n \times n; \mathbb{Q})$ alkiona). Osoita, että on olemassa vain äärellinen määrä alkulukuja p, joilla matriisi A_p ei ole kääntyvä.

"Tähti"-tehtäviä ei oteta huomioon kurssin harjoitustehtävien kokonaislukumäärää laskiessa. Esimerkiksi tässä sarjassa harjoitustehtäviä on virallisesti vain 6 tehtävää.