Äärellisulotteinen lineaarialgebra, kevät 2015.
Harjoitus 6.

Muista, että tähän harjoitussarjaan liittyvä laskuharjoitustilaisuus pidetään poikkeuksellisesti pe 20.12.15 klo 10-12 salissa CK111

Muistutus: *Kroneckerin delta* δ_{ij} määritellään seuraavasti:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{jos } i = j, \\ 0, & \text{jos } i \neq j. \end{cases}$$

1. Olkoon V äärellisulotteinen vektoriavaruus ja olkoot $\mathbf{v}_i \in V$, $i = 1, \ldots, n$. Osoita, että jono $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ on vapaa jos ja vain jos kaikilla $i = 1, \ldots, n$ on olemassa $L_i \in V^*$ siten, että $L_j(\mathbf{v}_i) = \delta_{ij}$ kaikilla $i, j \in \{1, \ldots, n\}$.

2. Olkoon $n \in \mathbb{N}$ ja olkoon

$$P_n = \{p \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid p \textit{ on polynomifunktio, jonka aste on korkeintaan } n\}.$$

Olkoon $a \in \mathbb{R}$. Jokaisella $k = 0, \ldots, n$ määritellään $L_k \colon P_n \to \mathbb{R}$ kaavalla

$$L_k(p) = \frac{p^{(k)}(a)}{k!}, p \in P_n.$$

Tässä $p^{(k)}$ on kuvauksen $p \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ k's derivaatta-funktio, missä nollas derivaatta tulkitaan olevan funktio itse.
Osoita, että $E = (1, x - a, (x - a)^2, \ldots, (x - a)^n)$ on $\mathbb{R}$-vektoriavaruuden P_n kanta.
Osoita, että jono $(L_0, \ldots, L_n)$ on kannan E duaalikanta.
Tässä $(x - a)^k$ on luonnollisesti kuvaus, joka kuvaa $x \in \mathbb{R}$ alkioksi $(x - a)^k$.
(Neuvo: Sovella edellistä tehtävää).

3. Olkoon $E = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m)$ äärellisulotteisen K-vektoriavaruuden V kanta ja olkoon $\varepsilon = (\varepsilon^1, \ldots, \varepsilon^m)$ kannan E duaalikanta.
a) Osoita, että kaikilla $\mathbf{v} \in V$ pätee

$$\mathbf{v} = \sum_{j=1}^{m} \varepsilon^j(\mathbf{v})\mathbf{e}_j.$$

Sovella tämä yhtälö edellisen tehtävän tilanteeseen.
b) Olkoon $L \in V^*$. Osoita, että vektorin L koordinaatit kannassa ε ovat skalaarit $L(\mathbf{e}_i)$, toisin sanoen pätee yhtälö

$$L = \sum_{i=1}^{m} L(\mathbf{e}_i)\varepsilon_i.$$

4. Osoita Proposition 2.119 väite todeksi:
Olkoot V, W K-vektoriavaruudet ja olkoot $\Phi_V : V \to V^{**}$, $\Phi_W : W \to W^{**}$ kanoniset kuvaukset. Olkoon $L\colon V \to W$ K-lineaarinen kuvaus. Osoita, että

$$L^{**} \circ \Phi_V = \Phi_W \circ L,$$

toisin sanoen diagrammi

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "L"] \arrow[d, "\Phi_V"] & W \arrow[d, "\Phi_W"] \\ V^{**} \arrow[r, "L^{**}"] & W^{**}. \end{tikzcd}$$

kommutoi.

Muistutus: kun X ja Y ovat joukkoja merkintä Y^X tarkoittaa kaikkien kuvausten $X \to Y$ muodostamaa joukkoa,

$$Y^X = \{f\colon X \to Y\}.$$

5. Olkoot V, U, W K-vektoriavaruuksia. Olkoon $F\colon V \times U \to W$ kuvaus. Jokaisella $\mathbf{v} \in V$ määritellään $F_{\mathbf{v}}\colon U \to W$ kaavalla

$$F_{\mathbf{v}}(\mathbf{u}) = F(\mathbf{v}, \mathbf{u}).$$

Koska $F_{\mathbf{v}} \in W^U$ kaikilla $\mathbf{v} \in V$, voidaan määritellä kuvaus $\tilde{F}\colon V \to W^U$ kaavalla $\tilde{F}(\mathbf{v}) = F_{\mathbf{v}}$. Osoita, että seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä.

(i) Kuvaus F on bilineaarinen.

(ii) $F_{\mathbf{v}} \in L(U, W)$ kaikilla $\mathbf{v} \in V$ ja kuvaus $\tilde{F}\colon V \to L(U, W)$ on lineaarinen.

6. Jatkoa edelliselle tehtävälle. Määritellään kuvaus $\Psi\colon L(V, U; W) \to L(V, L(U, W))$, $\Psi(F) = \tilde{F}$. Edellisen tehtävän nojalla tämä kuvaus on hyvin määritelty. Osoita, että Ψ on K-vektoriavaruuksien isomorfismi.

7.* Olkoon V äärellisulotteinen K-vektoriavaruus. Oletetaan, että $(L_1, L_2, \ldots, L_n)$ on eräs duaalin V^* kanta. Osoita, että on olemassa yksikäsitteinen avaruuden V kanta $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ siten, että $(L_1, L_2, \ldots, L_n)$ on tämän kannan duaalikanta.
(Vihje: refleksivisyys).

8.* Olkoon V äärellisulotteinen K-vektoriavaruus ja olkoon $E = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m)$ sen kanta. Olkoon $\varepsilon = (\varepsilon^1, \ldots, \varepsilon^m)$ tämän kannan duaalikanta.
Määritellään lineaarinen isomorfismi $L_E\colon V \to V^*$ siten, että kaikilla $i = 1, \ldots, m$ pätee $L_E(\mathbf{e}_i) = \varepsilon^i$.
a) Osoita esimerk(e)illä, että L ei yleensä ole ”kanoninen” eli voi hyvinkin rippua kannan valinnasta. Toisin sanoen näytä, että jos E' on toinen kanta, niin voi olla, että $L_E \neq L_{E'}$. Yritä keksiä mahdollisimman yleispäteviä esimerkkejä.
b) Olkoon $\Phi\colon V \to V^{**}$ kanoninen kuvaus, $\Phi(\mathbf{v})(L) = L(\mathbf{v})$. Olkoot E ja ε kuten a)-kohdassa. Osoita, että $\Phi = L_\varepsilon L_E$, toisin sanoen Φ kuvaa kannan E sen duaalikannan duaalikannaksi.

”Tähti”-tehtäviä ei oteta huomioon kurssin harjoitustehtävien kokonaislukumäärää laskiessa. Esimerkiksi tässä sarjassa harjoitustehtäviä on virallisesti vain 6 tehtävää.