Äärellisulotteinen lineaarialgebra, kevät 2015.
Harjoitus 5.
11.02.2015

1. Olkoot V ja W äärellisulotteisia K-vektoriavaruuksia ja olkoon $L\colon V \to W$ lineaarinen kuvaus.
a) Osoita, että L on injektio jos ja vain jos on olemassa *lineaarinen* kuvaus $L'\colon W \to V$ siten, että $L'L = \mathrm{id}_V$. Onko tällainen kuvaus L' silloin yksikäsitteinen?
b) Osoita, että L on surjektio jos ja vain jos on olemassa *lineaarinen* kuvaus $L'\colon W \to V$ siten, että $LL' = \mathrm{id}_W$. Onko tällainen kuvaus L' silloin yksikäsitteinen?

2. Olkoon $L\colon V \to W$ lineaarinen kuvaus. Olkoon $E = (\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{n-m})$ sellainen avaruuden V kanta, jolle $E' = (\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m)$ on aliavaruuden $\operatorname{Ker} L$ kanta (kts. Proposition 2.92 todistusta). Osoita, että jono $(L(\mathbf{v}_1), \ldots, L(\mathbf{v}_{n-m}))$ on vapaa.

3. a) Olkoon $L\colon \mathbb{Z}_5^4 \to \mathbb{Z}_5^2$ $\mathbb{Z}_5$-lineaarinen kuvaus, jolle pätee
$$\operatorname{Ker} L = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{Z}_5^4 \mid x_1 = 2_5 x_3, x_2 = -4_5 x_4\}.$$
Osoita, että L on surjektio. Anna kaksi erilaista esimerkkiä kuvauksesta L, joka toteuttaa tehtävänannon.
b) Onko olemassa lineaarista kuvausta $L\colon \mathbb{C}^5 \to \mathbb{C}^2$, jolle pätee
$$\operatorname{Ker} L = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{C}^5 \mid x_1 = (1+i)x_3, x_2 = x_4 = -ix_5\}?$$

4. Tarkastellaan $\mathbb{R}$-vektoriavaruutta $\mathbb{R}^2$.
a) Olkoon $= ((1,0),(0,1))$ standardikanta ja olkoon $E' = ((1,1),(1,-2))$. Osoita, että E' on avaruuden $\mathbb{R}^2$ kanta ja muodosta kannanvaihtomatriisit $A = [E' \mid E]$ ja $B = [E \mid E']$. Laske AB ja BA suoraan matriisikertolaskun määritelmästä lähtien ja toteaa, että lopputulos on kummassakin tapauksessa yksikkömatriisi.
b) Määritellään kuvaus $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ kaavalla $L(x) = ix$, missä
$x = (a,b) \in \mathbb{R}^2$ ajatellaan kompleksilukuna (ja i on imaginääriyksikkö). Osoita, että L on $\mathbb{R}$-lineaarinen. Muodosta matriisit $[L]_E$, $[L]_{E',E}$. Laske tämän jälkeen matriisi $[L]_{E'}$ kahdella tavalla - suoraan määritelmästä lähtien sekä kannanvaihtokaavalla (2.88) ja matriisin $[L]_E$ avulla.

Olkoon $(V,+,\cdot)$ $\mathbb{R}$-vektoriavaruus. Olkoon $\cdot'\colon \mathbb{C} \times V \to V$ $\mathbb{C}$-skalaarikertolasku joukossa V siten, että $(V,+,\cdot')$ on $\mathbb{C}$-vektoriavaruus. Tällöin $\mathbb{C}$-avaruutta $(V,+,\cdot')$ sanotaan $\mathbb{R}$-avaruuden $(V,+,\cdot)$ $\mathbb{C}$-*laajennukseksi* jos $\cdot'(r,v) = \cdot(r,v)$ kaikilla $r \in \mathbb{R}$, $v \in V$.

5. Olkoon $V = (V,+,\cdot)$ $\mathbb{R}$-vektoriavaruus. Olkoon $J\colon V \to V$ $\mathbb{R}$-lineaarinen operaattori, jolle pätee $J^2 = -\mathrm{id}_V$. Määritellään joukossa V $\mathbb{C}$-skalaarikertolasku $\cdot'\colon C \times V \to V$ kaavalla
$$(a+ib)\cdot \mathbf{v} = a\mathbf{v} + b(J\mathbf{v}).$$
a) Osoita, että $(V,+,\cdot')$ on $\mathbb{R}$-avaruuden V $\mathbb{C}$-laajennus.
c) Olkoon $A\colon V \to V$ kuvaus. Osoita, että A on $\mathbb{C}$-lineaarinen avaruuden $(V,+,\cdot')$ struktuurin suhteen jos ja vain jos se on $\mathbb{R}$-lineaarinen avaruuden V alkuperäisen $\mathbb{R}$-vektoriavaruuden struktuurin suhteen ja lisäksi pätee $AJ = JA$.

6. Olkoon $(V, +, \cdot)$ on äärellisulotteinen $\mathbb{R}$-vektoriavaruus. Osoita, että seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä.

   (i) Avaruudella V on olemassa $\mathbb{C}$-laajennus.

   (ii) On olemassa $\mathbb{R}$-lineaarinen kuvaus $L\colon V \to V$ jolle pätee $L^2 + \mathrm{id}_V = 0$.

   (iii) $\dim_{\mathbb{R}} V$ on parillinen luonnollinen luku.

7.* Olkoon K *äärellinen* kunta ja olkoon p sen karakteristika. Osoita, että $|K| = p^m$ jollakin $m \in \mathbb{N}$. (Vihje: Osoita, että K on $\mathbb{Z}_p$-vektoriavaruus).

8.* a) Olkoot R vaihdannainen ja epätriviaali rengas. Oletetaan, että ainoat sen ideaalit ovat triviaalit ideaalit $\{0\}$ ja R. Osoita, että R on kunta.
b) Olkoon K kunta. Osoita, että $(n \times n)$-kokoisten matriisien muodostaman renkaan $M(n \times n; K)$ ainoat ideaalit ovat triviaalit ideaalit $\{0\}$ ja $M(n \times n; K)$.

"Tähti"-tehtävää ei oteta huomioon kurssin harjoitustehtävien kokonaislukumäärää laskiessa. Esimerkiksi tässä sarjassa harjoitustehtäviä on virallisesti vain 6 tehtävää.