Äärellisulotteinen lineaarialgebra, kevät 2015.
Harjoitus 4.
04.02.2015

1. Olkoon $(V, \oplus, \odot)$ Harjoituksessa 3.6 tarkasteltu $\mathbb{R}$-vektoriavaruus. Osoita, että V on äärellisviritteinen. Mikä on avaruuden V ulottuvuus? Anna kaksi erilaista esimerkkiä sen kannasta.

   Onko kuvaus $L\colon \mathbb{R}^2 \to V$, $L(x,y) = 5^{x-2y^2}$ lineaarinen? Entä kuvaus $L'\colon \mathbb{R}^3 \to V$, $L(x,y,z) = 7^{5y-7z}$?

2. Olkoot W, U K-vektoriavaruuden V aliavaruuksia.
   Karteesisessa tulossa $W \times U$ voidaan määritellä luonnollinen K-vektoriavaruuden struktuuri asettamalla

$$(\mathbf{w}, \mathbf{u}) + (\mathbf{w}', \mathbf{u}') = (\mathbf{w} + \mathbf{w}', \mathbf{u} + \mathbf{u}'),$$

$$k(\mathbf{w}, \mathbf{u}) = (k\mathbf{w}, k\mathbf{u}).$$

   Tällöin $(W \times U, +, \cdot)$ on K-vektoriavaruus, jota sanotaan avaruuksien W, U *tuloavaruudeksi* (tämä voi pitää tunnettuna.) Määritellään $L\colon W \times U \to V$ kaavalla

$$L(\mathbf{w}, \mathbf{u}) = \mathbf{w} + \mathbf{u}.$$

   Osoita, että L on lineaarinen kuvaus ja että

$$\operatorname{Ker} L = \{(\mathbf{v}, -\mathbf{v}) \mid \mathbf{v} \in W \cap U\},$$

$$\operatorname{Im} L = W + U = \{\mathbf{w} + \mathbf{u} \mid \mathbf{w} \in W, \mathbf{u} \in U\}.$$

   Päättele tästä, että $W + U$ on avaruuden V aliavaruus, joka on isomorfinen tekijäavaruuden $(V \times W)/\operatorname{Ker} L$ kanssa. Osoita myös, että $\operatorname{Ker} L$ on isomorfinen aliavaruuden $W \cap U$ kanssa.

3. Olkoot W, U K-vektoriavaruuden V aliavaruuksia.
   a) Osoita, että $W + U = \operatorname{Span}(W \cup U)$. Tässä $W + U$ on määritelty edellisessä tehtävässä.
   b) Oletetaan, että V on äärellisulotteinen. Osoita, että

$$\dim(W + U) = \dim W + \dim U - \dim(W \cap U).$$

4. Olkoon $(V, +, \cdot')$ $\mathbb{C}$-vektoriavaruus. Rajoittamalla skalaarikertolasku $\cdot'$ joukkoon $\mathbb{R} \times V$ saadaan $\mathbb{R}$-skalaarikertolasku $\cdot\colon \mathbb{R} \times V \to V$. Kolmikko $(V, +, \cdot)$ on tällöin $\mathbb{R}$-vektoriavaruus.

   Oletetaan, että $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$ on $\mathbb{C}$-vektoriavaruuden $(V, +, \cdot')$ kanta. Osoita, että $(\mathbf{v}_1, i\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, i\mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n, i\mathbf{v}_n)$ on $\mathbb{R}$-vektoriavaruuden $(V, +, \cdot)$ kanta. Päättele tästä, että

$$\dim_{\mathbb{R}} V = 2 \dim_{\mathbb{C}} V,$$

   kun V on äärellisulotteinen.

5. Olkoon p alkuluku. Tarkastellaan avaruudessa $(\mathbb{Z}_p)^4$ vektoreita $\mathbf{v}_1 = (4_p, 3_p, (-2)_p, 2_p)$, $\mathbf{v}_2 = ((-2)_p, 2_p, 1_p, 3_p)$, $\mathbf{v}_3 = (0_p, (-2)_p, 3_p, (-6)_p)$, $\mathbf{v}_4 = (5_p, 1_p, (-1)_p, (-3)_p)$, $\mathbf{w} = (1_p, 0_p, 0_p, 0_p)$.

   Tutki pitävätkö väitteet (i),(ii) ja (iii) alla paikkansa kun a) $p = 7$, b) $p = 11$.

   (i) Vektori $\mathbf{w}$ kuuluu aliavaruuteen $\mathrm{Span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$.
   (ii) Jono $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$ on vapaa.
   (iii) Jono $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$ on $\mathbb{Z}_p$-vektoriavaruuden $(\mathbb{Z}_p)^4$ kanta.

6. Olkoon V $\mathbb{R}$-vektoriavaruus. Määritellään joukossa $V \times V$ $\mathbb{C}$-vektoriavaruuden struktuuri asettamalla

$$(\mathbf{v}, \mathbf{w}) + (\mathbf{v}', \mathbf{w}') = (\mathbf{v} + \mathbf{v}', \mathbf{w} + \mathbf{w}'),$$
$$(a + bi)(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = (a\mathbf{v} - b\mathbf{w}, a\mathbf{w} + b\mathbf{v})$$

   kaikilla $\mathbf{v}$, $\mathbf{w} \in V$, $a, b \in \mathbb{R}$.
   a) Osoita, että näillä laskutoimituksilla varustettuna $V \times V$ on todellakin $\mathbb{C}$-vektoriavaruus.
   b) Osoita, että avaruuden $V \times V$ osajoukko

$$W = \{(\mathbf{v}, \mathbf{0}_V) \mid \mathbf{v} \in V\}$$

   on suljettu skalaarikertolaskun kunnan $\mathbb{R}$ alkioilla ja on $\mathbb{R}$-vektoriavaruutena isomorfinen avaruuden V kanssa.
   c) Edellisen kohdan nojalla sovitaan samastamaan vektori $(\mathbf{v}, \mathbf{0}_V)$ vektorin $\mathbf{v} \in V$ kanssa. Tällöin V voidaan ajatella joukon $V \times V$ osajoukkona. Osoita, että tällä sopimuksella jokainen avaruuden $V \times V$ vektori voidaan kirjoittaa yksikäsitteisellä tavalla muodossa $\mathbf{v} + i\mathbf{w}$, missä $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$. Näytä myös, että tällöin $\mathbb{C}$-skalaarikertolasku avaruudessa $V \times V$ voidaan laskea kaavalla

$$(a + ib)(\mathbf{v} + i\mathbf{w}) = (a\mathbf{v} - b\mathbf{w}) + i(a\mathbf{w} + b\mathbf{v}).$$

7*. Olkoon p alkuluku. Tarkastellaan $\mathbb{Z}_p$-vektoriavaruutta $\mathbb{Z}_p^2$. Määritellään joukossa $\mathbb{Z}_p^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$ relaatio $\sim$ ehdolla

$$\mathbf{v} \sim \mathbf{w} \text{ jos ja vain jos on olemassa } k \in \mathbb{Z}_p \text{ siten, että } k\mathbf{v} = \mathbf{w}.$$

   a) Osoita, että $\sim$ on ekvivalenssirelaatio.
   b) Osoita, että jokaisen alkion $\mathbf{v} \in \mathbb{Z}_p^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$ luokassa on täsmälleen $(p - 1)$ alkiota.
   c) Osoita edellisen avulla, että avaruudella $\mathbb{Z}_p^2$ on tasan $(p + 1)$ yksiulotteista aliavaruutta.
   d) Kuinka monta yksiulotteista aliavaruutta on $\mathbb{Z}_p$-vektoriavaruudella $\mathbb{Z}_p^n$, $n \geq 1$?

8*. Kun A ja B ovat äärellisiä joukkoja, yhdisteen $A \cup B$ alkioiden lukumäärä voidaan laskea kaavalla $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cup B|$. Harjoituksen 3 b)-kohdan tulosta voidaan pitää tämän kaavan analogiana äärellisulotteisille vektoriavaruuksille.

   Kolmelle äärelliselle joukolle A, B, C vastaava kaava on

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

Harjoituksen 3 valossa voisi arvata, että äärellisulotteisen vektoriavaruuden V aliavaruuksille W, U, Z pätee analoginen kaava

$$\dim(W+U+Z) = \dim W + \dim U + \dim Z - \dim(W \cap U) - \dim(W \cap Z) - \dim(U \cap Z) + \dim(W \cap U \cap Z).$$

Näytä, että tämä kaava ei kuitenkaan pidä paikkaansa yleisesti.

”Tähti”-tehtäviä ei oteta huomioon kurssin harjoitustehtävien kokonaislukumäärää laskiessa. Esimerkiksi tässä sarjassa harjoitustehtäviä on virallisesti vain 6 tehtävää.