Äärellisulotteinen lineaarialgebra, kevät 2015.
Harjoitus 3.
28.1.2015

1. Määritellään kaikilla $a, b \in \mathbb{R}$ funktio $f_{a,b}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kaavalla $f_{a,b}(x) = ax + b$, $x \in \mathbb{R}$. Olkoot

$$G = \{f_{a,b} \mid a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0\},$$
$$H = \{f_{a,0} \mid a \in \mathbb{R}, a \neq 0\},$$
$$N = \{f_{1,b} \mid b \in \mathbb{R}\},$$
$$G' = \{\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0\}.$$

   a) Osoita, että G on ryhmä kuvausten yhdistämisen suhteen. Osoita myös, että G on ryhmänä isomorfinen ryhmän $(G', \cdot)$ kanssa. Tässä $\cdot$ on matriisien kertolasku.

   b) Olkoon $A\colon G \to H$, $A(f_{a,b}) = f_{a,0}$. Osoita, että A on surjektiivinen ryhmähomomorfismi, jonka ydin on N. Osoita tämän avulla, että N on ryhmän G normaali aliryhmä ja tekijäryhmä G/N on isomorfinen ryhmän H kanssa.

   c) Onko H ryhmän G normaali aliryhmä? Onko H isomorfinen jonkun toisen tutun ryhmän kanssa?

2. Olkoon R rengas ja olkoon $x \in R$. Olkoon

$$I_x = \{\sum_{i=1}^{n} a_i x b_i \mid a_i, b_i \in R, n \geq 1\}.$$

   a) Osoita, että I_x on renkaan R ideaali, itse asiassa (sisältyvyysrelaation suhteen) *pienin* renkaan R ideaali, joka sisältää alkion x.

   b) Olkoon R vaihdannainen. Totea, että tällöin $I_x = \{ax \mid a \in R\}$.

3. Kaikki polynomifunktiot $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ muodostavat renkaan $P(\mathbb{R})$ pisteittäisen yhteen- ja kertolaskun suhteen. Tämä pidetään tunnettuna. Olkoon $q\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $q(x) = x^2 + 1$. Olkoon $I_q \subset P(\mathbb{R})$ kuten edellisessä tehtävässä. Osoita, että tekijärenkaassa $P(\mathbb{R})/I_q$ on olemassa sellainen alkio i, jolle pätee $i^2 = -1$.

4. a) Lemmassa 1.94 osoitetaan, että kokonaislukujen $m, n \in \mathbb{Z}$ suurin yhteinen tekijä $c = \mathrm{syt}(m, n)$ voidaan esittää muodossa $c = mk + nl$, $k, l \in \mathbb{Z}$, mutta ei anneta mitään käytännön menetelmää, jonka avulla tällainen esitys voidaan löytää. Suosituin sellainen menetelmä on kuuluisa *Eukleideen algoritmi* (engl. Euclidean algorithm). Palauta mieleen tai selvitä (esim. internetin avulla) miten tämä algoritmi etenee. Esitä sen avulla $c = \mathrm{syt}(126, 35)$ muodossa $c = 126k + 35l$.
b) Lauseen 1.95 todistuksessa näytetään, miten Lemman 1.94 tuloksen avulla voidaan laskea alkioiden käänteisalkioita renkaassa $\mathbb{Z}_m$ (jos olemassa). Laske tämän menetelmän ja Eukleideen algoritmin avulla 16^{-1}_{21}, 15^{-1}_{21}, 16^{-1}_{23}, jos ne ovat olemassa. Jos käänteisalkiota ei ole olemassa, selitä miksi.

5. Olkoot $(R, +, \cdot)$ ja $(R', +, \cdot)$ renkaita. Määritellään karteesisessa tulossa $R \times R'$ laskutoimituksia $+, \cdot$ "koordinaateittain" eli kaavoilla

$$(r_1, r_1') + (r_2, r_2') = (r_1 + r_2, r_1' + r_2'),$$

$$(r_1, r_1') \cdot (r_2, r_2') = (r_1 r_2, r_1' r_2')$$

Tällöin (tämä voidaan pitää tunnettuna) $(R \times R', +, \cdot)$ on rengas, jota sanotaan renkaiden $(R, +, \cdot)$ ja $(R', +, \cdot)$ *tulorenkaaksi*.

a) Osoita, että kuvaus $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$, $f(n) = (n_2, n_3)$ on surjektiivinen rengashomomorfismi.

b) Osoita a)-kohdan ja renkaiden isomorfialauseen avulla, että rengas $\mathbb{Z}_6$ on isomorfinen tulorenkaan $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ kanssa.

c) Onko rengas $\mathbb{Z}_4$ isomorfinen tulorenkaan $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ kanssa? Onko Abelin ryhmä $(\mathbb{Z}_4, +)$ isomorfinen Abelin ryhmän $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, +)$ kanssa?

6. Olkoon $V = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ positiivisten reaalilukujen joukko.
Määritellään laskutoimitukset $\oplus\colon V \times V \to V$, $\odot\colon \mathbb{R} \times V \to V$ kaavoilla

$$\oplus(x, y) = xy \text{ (tavallinen reaalilukujen kertolasku) },$$

$$\odot(r, x) = x^r \text{ (tavallinen reaalilukujen eskponentti) }.$$

Osoita, että $(V, \oplus, \odot)$ on $\mathbb{R}$-vektoriavaruus. Mikä on tämän vektoriavaruuden nollavektori? Mikä on vektorin $x \in V$ vasta-vektori?

7.* Olkoon $(G, +)$ ryhmä. Sanomme, että G on *jakoryhmä*, jos kaikilla $x \in G$ ja $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ on olemassa $y \in G$ jolle $y^n = x$. Toisin sanoen jakoryhmä on ryhmä, jossa jokaisella alkiolla on olemassa jokaisen kertaluvun *juuri*.
Jos $(G, +)$ on additiivisesti merkitty Abelin ryhmä, se on jakoryhmä mikäli kaikilla $x \in G, n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ on olemassa y jolle pätee $ny = x$.

a) Anna esimerkkejä Abelin ryhmistä, jotka ovat jakoryhmiä ja Abelin ryhmistä, jotka eivät ole jakoryhmiä. Onko jakoryhmän alkion n:s juuri välttämättä yksikäsitteinen? (Vihje: mieti esim. kompleksilukujen kertolaskua).

b) Olkoon $(V, +, \cdot)$ $\mathbb{Q}$-vektoriavaruus. Osoita, että $(V, +)$ on jakoryhmä.

c) Olkoon $(G, +)$ jakoryhmä. Voidaanko joukossa G määritellä $\mathbb{Q}$-skalaarikertolasku $\cdot\colon \mathbb{Q} \times G \to G$, siten, että $(G, +, \cdot)$ on $\mathbb{Q}$-vektoriavaruus? Jos voidaan, niin millä lisäehdoilla? Onko tällainen skalaarikertolasku tällöin yksikäsitteinen?

"Tähti"-tehtävää ei oteta huomioon kurssin harjoitustehtävien kokonaislukumäärää laskiessa. Esimerkiksi tässä sarjassa harjoitustehtäviä on virallisesti vain 6 tehtävää.